目　　录

引 言

非线性偏微分方程定解问题的求解，没有一般方法可循，但也有一些效力较大，适应面较为广泛的方法. 下面所谈的就是其中一类方法. 其步骤如下:

1. 选定一个适当的函数空间.

2. 定出一族函数映象. 一般是用线性定解问题逼近这一非线性定解问题. 建立起解与给定变元间的映象.

3. 证明此映象族有一不动点，得到非线性定解问题的至少一个解.

4. 解性质的研究. 由第3步得到的解一般较粗糙，再进一步研究此解的光滑性等.

第1步多半是选用某种 Banach 空间，如 C^{α} 空间，Соболев 空间等，以及第2步对线性定解问题作研究，均可参阅[49]. 第3步不动点定理，常用的有压缩映象原理，Leray-Schauder 映象的拓扑度定理等. 由于许多书都讲述这些不动点定理，我们就不讲了. 第2，3，4步都用一定的估计(包括先验估计)，因此下面我们主要讲估计方法.

非线性偏微分方程定解问题的其它解法，在此也稍提一下.

非线性偏微分方程定解问题作某种变形，化为另一类问题求解. 其中很吸引人的是化为非线性变分问题求解[1]. 它能解决较多的问题，但也受到相当的限制，即原非线性方程必须是某一变分问题的 Euler 方程，这使方程系数受到较大限制.

用半群方法解决非线性发展方程的某些定解问题，也能使较多问题得到解决[2],[3]. 但也受到相当的限制，即方程连初、边值在

内要适合半群性质，区域也要适当规则等.

还有另一些解法.

由此本书下面所叙述的仅是一类解决非线性定解问题的方法，即所用工具主要是不动点与先验估计的方法. 对拟线性方程是如此，对完全非线性方程，更拓广了一般极值原理到 Александров 型极值原理，使得做先验估计方面更为有力一些.

第一章　具散度结构头部的二阶拟线性抛物型方程的第一边值问题[4]

设Ω为$\boldsymbol{R}^n$中的有界区域，$T>0$. 在$Q=\Omega\times(0,T]$中，考察具散度结构头部的方程

$$\mathscr{L}u\equiv u_t-\sum_i\frac{d}{dx_i}(a_i(x,t,u,u_{x_k}))$$
$$+a(x,t,u,u_{x_k})=0,\quad(1\leqslant k\leqslant n)$$

与初、边值条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad(x\in\Omega),$$
$$u|_S=\phi|_S,$$

其中$S=\partial\Omega\times[0,T]$，$\varphi$，$\phi$分别是$\Omega$与$S$上给定的函数. 设$\Omega$满足条件(A)：

$$\operatorname{mes}[K(\rho)\cap\Omega]\leqslant(1-\theta_0)\operatorname{mes}K(\rho),\quad 0<\theta_0<1,\ \rho<a_0,\tag{A}$$

其中$K(\rho)=\{|x-x_0|<\rho,\ x_0\in\partial\Omega\}$，$\theta_0$与$a_0$为常数. 对系数$a_i$、$a$的条件将按需要逐步给出. 要证明上述初、边值问题解为存在唯一.

§1　解的有界估计与 Hölder 条件估计

进行先验估计. 设$u\in C^{2,1}(\bar{Q})$，于Q内为第一边值问题的解，且设a，$\frac{\partial a_i}{\partial p_j}$，$\frac{\partial a_i}{\partial u}$，$\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$当变量有界时为有界，则有

定理 1　设$a_i(1\leqslant i\leqslant n)$，$a$满足条件

$$\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\big|_{p=0}\geqslant0,\quad p=(p_1,\cdots,p_n),$$

$$u\left[-\sum\frac{\partial a_i(x,t,u,0)}{\partial x_i}+a(x,t,u,0)\right]\geqslant -b_1u^2-b_2.$$

$\forall(x,t)\in\bar{Q}$，其中常数 $b_1\geqslant 0$，$b_2\geqslant 0$，则解的最大模可估计如下：

$$\max_{\bar{Q}}|u(x,t)|\leqslant\min_{b>b_1}e^{bT}\left[\max_{\partial^*Q}|u(x,t)|+\left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{1/2}\right]\equiv M,$$

其中 $\partial^*Q=\Omega\times\{t=0\}\cup S$.

证 当 $u(x,t)\equiv 0$，定理显然成立，故可设 $u(x,t)\not\equiv 0$. 作变换 $u=ve^{bt}$（b 为常数），估计 $v^2(\neq 0)$ 的最大值. 由于方程

$$u_t-\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}u_{x_ix_j}-\sum\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{x_i}-\sum\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a=0$$

化为

$$\frac{1}{2}(v^2)_t+bv^2-\frac{1}{2}\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}(v^2)_{x_ix_j}+\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}v_{x_i}v_{x_j}$$

$$-\frac{1}{2}\sum\frac{\partial a_i}{\partial u}(v^2)_{x_i}+\left(a-\sum\frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right)ve^{-bt}=0,$$

当 $v^2(\neq 0)$ 在 $\bar{Q}$ 中的最大点不在 ∂^*Q 上时，于此点处，$v_{x_i}=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，$(v^2)_t\geqslant 0$，$\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}(v^2)_{x_ix_j}\leqslant 0$. 因此

$$bv^2\leqslant\left[\sum\frac{\partial a_i}{\partial x_i}-a\right]_{u_{x_1}=\cdots u_{x_n}=0}ve^{-bt}\leqslant\frac{v}{u}e^{-bt}(b_1u^2+b_2)$$

$$\leqslant b_1v^2+b_2,$$

故有

$$|v|\leqslant\left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{1/2}.$$

与边界条件结合得

$$|v|\leqslant\max\left[|v|_{\partial^*Q},\left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{1/2}\right]\leqslant\max_{\partial^*Q}|u|+\left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{1/2},$$

$$\max_{\bar{Q}}|u(x,t)|\leqslant e^{bT}\max_{Q}|v|\leqslant e^{bT}\left[\max_{\partial^*Q}|u(x,t)|\right.$$

$$\left.+\left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{1/2}\right],$$

再右边对 $b \geqslant b_1$ 取 min. 定理证毕.

作 Hölder 条件估计，需再假设存在正常数 μ_1, ν_1，使得当 $(x, t) \in \bar{Q}, |u| \leqslant M, p = (p_1, \cdots, p_n) \in \boldsymbol{R}^n$ 时,下面两式成立:

$$\sum_i a_i(x, t, u, p_k)p_i \geqslant \nu_1 |p|^2 + \mu_1,$$

$$\sum_i |a_i(x, t, u, p_k)|(1 + |p|) + |a(x, t, u, p_k)|$$
$$\leqslant \mu_1(1 + |p|^2).$$

$\mathscr{L}u = 0$ 乘 $\eta(x, t)$ 于 Ω 积分，当 t 固定时，要求 $\eta(x, t) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$，得

$$\int_\Omega u_t(x, t)\eta(x, t)dx + \int_\Omega [\sum a_i(x, t, u, u_{x_k})\eta_{x_i}(x, t)$$
$$+ a(x, t, u, u_{x_k})\eta(x, t)]dx = 0,$$

取 $\eta(x, t) = [u(x, t) - k]^+\zeta^2(x)$, k 为常数，$\zeta(x)$ 为于 $K(\rho) = \{x | |x - x^0| < \rho\}$ $(x^0 \in \Omega)$ 内不为零的截断函数，为保证 $\eta \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$，取 $k \geqslant \max\limits_{x \in K(\rho) \cap S} u(x, t)$ 即可，记 $A_{k,\rho}(t) = \{x \in K(\rho) \cap \Omega | u(x, t) > k\}$. 由上式得:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)} (u - k)^2\zeta^2 dx + \nu_1 \int_{A_{k,\rho}(t)} |\nabla u|^2\zeta^2 dx$$
$$\leqslant \int_{A_{k,\rho}(t)} \Big[\mu_1\zeta^2 + \Big|\sum_i a_i(u - k)2\zeta\zeta_{x_i}\Big|$$
$$+ |a(u - k)\zeta^2|\Big] dx \leqslant \int_{A_{k,\rho}(t)} \{\mu_1\zeta^2 + \mu_1(u - k)$$
$$\cdot [2\zeta|\nabla\zeta|(|\nabla u| + 1) + (|\nabla u|^2 + 1)\zeta^2]\}dx$$
$$\leqslant \mu_1 \int_{A_{k,\rho}(t)} \Big[\zeta^2 + \varepsilon(|\nabla u|^2 + 1)\zeta^2 + \frac{4}{\varepsilon}(u - k)^2|\nabla\zeta|^2$$
$$+ (u - k)(|\nabla u|^2 + 1)\zeta^2\Big] dx,$$

上式中正数 ε 可以任意取定. 我们取 k 使

$$\max_{K(\rho) \cap \Omega} [u(x, t) - k] \leqslant \frac{\nu_1}{4\mu_1} \equiv \delta,$$

取 $\varepsilon=\delta$, 注意到截断函数 $\zeta\leqslant 1$, 由上式得:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx+\nu_1\int_{A_{k,\rho}(t)}|\nabla u|^2\zeta^2dx$$
$$\leqslant\gamma\left[\iint_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2dx+\text{mes}\,A_{k,\rho}(t)\right],$$

其中

$$k\geqslant\max\{\sup_{x\in K(\rho)\cap\Omega}u(x,t)-\delta,\ \sup_{x\in K(\rho)\cap S}u(x,t)\},$$
$$\gamma=\gamma(\mu_1,\nu_1,M).$$

同法得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{B_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx+\nu_1\int_{B_{k,\rho}(t)}|\nabla u|^2\zeta^2dx$$
$$\leqslant\gamma\left[\iint_{B_{k,\rho}(t)}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2dx+\text{mes}\,B_{k,\rho}(t)\right],$$

其中

$$B_{k,\rho}(t)=\{x\in K(\rho)\cap\Omega\,|\,u(x,t)<k\},$$
$$k\leqslant\min\{\inf_{x\in K(\rho)\cap\Omega}u(x,t)+\delta,\ \inf_{x\in K(\rho)\cap S}u(x,t)\}$$

因此

$$u\in\mathscr{B}_2\left(Q,M,\nu_1,\gamma,\frac{\nu_1}{4\mu_1},0\right),$$

$\mathscr{B}_2$ 类函数的定义见 [49] 抛物型方程部分 §5. 由对 $\mathscr{B}_2$ 类函数性质的研究得到解的 Hölder 条件估计，即存在 $\alpha>0$ 使 $\|u\|_{\alpha,Q}$ 可由 M, ν_1, μ_1, θ_0, a_0 与 $\|u\|_{\beta,\partial^*Q}$ 估计. 因而

$$\|u\|_{\alpha,Q}=\sup_{(x,t)\in Q}|u(x,t)|$$
$$+\sup_{(x,t),(x',t')\in Q}\frac{|u(x,t)-u(x',t')|}{(|x-x'|^2+|t-t'|)^{\alpha/2}}$$

为有界.

如仅考虑内估计，则在 $Q'=\Omega'\times[\varepsilon,T](\bar{\Omega}'\subset\Omega)$ 中 $\|u\|_{\alpha,Q'}$ 可由 M, ν_1, μ_1 与 ε, $d(\Omega',\partial\Omega)$ 估计.

§2 $D_x u$ 的有界估计

再进行 $\nabla u = D_x u = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n})$ 的有界估计. 设当 $(x, t) \in \bar{Q}, |u| \leqslant M, p \in \boldsymbol{R}^n$ 时有

$$\nu(M)|\xi|^2 \leqslant \sum \frac{\partial a_i(x, t, u, p_k)}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \leqslant \mu(M)|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

$$\sum_i |a_i(x, t, u, p_k)|(1 + |p|) + |a| + \sum_{i,j} \left| \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \right| (1 + |p|^2)$$
$$+ \sum_i \left| \frac{\partial a_i}{\partial u} \right| (1 + |p|) + \sum_{i,k} \left| \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right| \leqslant \mu(M)(1 + |p|^2).$$

又假设 $u|_S = 0$. 这一假设基本上不限制一般性, 因为一般是 $u|_S = \phi$, 设 ϕ 可拓广到 $\bar{Q}$ 上使 $\phi(x, t) \in C^{2,1}(\bar{Q})$, 则用 $u(x,t) - \phi(x, t)$ 代替 u, 而考察这一新的 u 即可.

在上述假设下,先估计 $\|\nabla u\|_{L^2(Q)}$. 做法为考察

$$\int_\Omega \mathscr{L} u(e^{\lambda u} - 1)dx = 0,$$

λ 为待定常数. 分部积分得

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega (e^{\lambda u} - \lambda u)dx + \int_\Omega [\sum a_i \lambda u_{x_i} e^{\lambda u}$$
$$+ a(e^{\lambda u} - 1)]dx = 0.$$

上式对 t 再积分,应用由 $\sum \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \geqslant \nu \sum \xi_i^2$ 导出的式子

$$\sum a_i p_i = \sum \frac{\partial a_i(x, t, u, \tilde{p}_k)}{\partial p_j} p_i p_j + \sum a_i(x, t, u, 0) p_i$$
$$\geqslant \frac{\nu}{2}|p|^2 - C,$$

($\tilde{p}_k$ 在 0 与 p_k 之间)以及 $|a| \leqslant \mu(1 + |p|^2)$ 得:

$$\frac{\lambda\nu}{2} \int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2 e^{\lambda u} dx\, dt \leqslant C \int_0^t \int_\Omega e^{\lambda u}(\lambda + 1 + |\nabla u|^2) dx\, dt$$
$$+ \frac{1}{\lambda} \int_\Omega (\lambda u - e^{\lambda u}) dx \Big|_0^t,$$

取 $\lambda = 4C/\nu$ 得:

$$\int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\, dt \leqslant M_1, \quad \forall t \in [0, T].$$

再估计 $\int_\Omega |\nabla u|^{2s+2} dx$, $t \in [0, T]$, $0 \leqslant s \leqslant 3n/2$ (为了下面的应用,估到 $s \leqslant 3n/2$ 已足够).

先作内估计. 设中心在 Ω 内的球 $K(2\rho) \subset \Omega$. 取截断函数 $\zeta(x)$ 使 $\zeta(x) = 0$, 当 $x \notin K(2\rho)$. 考察

$$-\int_0^t dt \int_{K(2\rho)} \sum_{k=1}^n \mathscr{L} u \frac{d}{dx_k} (|\nabla u|^{2s} u_{x_k} \zeta^2) dx = 0, \quad (s \geqslant 0).$$

暂设 u_{tx_k} 与 $D_x^3 u$ 为连续,上式分部积分得:

$$\frac{1}{2s+2} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} \zeta^2 dx \Big|_{t=0}^{t=t} + \int_0^t dt \int_{K(2\rho)} \sum \Big[\frac{da_i}{dx_k} \cdot \frac{d}{dx_i} (|\nabla u|^{2s} u_{x_k} \zeta^2) - a \frac{d}{dx_k} (|\nabla u|^{2s} u_{x_k} \zeta^2) \Big] dx = 0,$$

由于上式最后结果仅出现 $D^2 u$, 故逼近取极限后知对 $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$ 为成立. 由于

$$\frac{da_i}{dx_k} = \sum \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_j x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k},$$

$$\frac{d}{dx_i} (|\nabla u|^{2s} u_{x_k} \zeta^2) = |\nabla u|^{2s} u_{x_k x_i} \zeta^2 + 2s |\nabla u|^{2s-2} \sum u_{x_l} u_{x_l x_i} u_{x_k} \zeta^2 + |\nabla u|^{2s} u_{x_k} 2\zeta \zeta_{x_i},$$

代入上式并应用 $2ab \leqslant \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon$ 得:

$$\frac{1}{2s+2} \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^{2s+2} \zeta^2 dx \Big|_0^t + \int_0^t \int_{K(2\rho)} \sum \Big(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} |\nabla u|^{2s} \cdot u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \zeta^2 + 2s \frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} |\nabla u|^{2s-2} u_{x_k} u_{x_k x_j} u_{x_l} u_{x_l x_i} \zeta^2 \Big) dx\, dt$$

$$\leqslant C_s \int_0^t \int_{K(2\rho)} \Big[\varepsilon |\nabla u|^{2s} \sum_{k,i} u_{x_k x_i}^2 \zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u|^{2s} (|\nabla u|^4 + 1) \zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\nabla u|^{2s} (|\nabla u|^2 + 1) |\nabla \zeta|^2 \Big] dx\, dt, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

$C_s=C(\mu(M),\nu(M),s)$. 记 $\sum_k u_{x_k}u_{x_kx_i}=v_{x_i}$，其中 $v=|p|^2/2$. 取 ε 使 $C_s\varepsilon=\nu/2$，由上式得

$$\frac{1}{s+1}\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^{2s+2}\zeta^2dx\Big|_0^t+\nu\int_0^t\int_{K(2\rho)}\Big[|\nabla u|^{2s}\sum_{k,i}u^2_{x_kx_i}\zeta^2$$

$$+4s|\nabla u|^{2s-2}\sum_i v^2_{x_i}\zeta^2\Big]dx\,dt\leqslant C_s\int_0^t\int_{K(2\rho)}[|\nabla u|^{2s+4}\zeta^2$$

$$+|\nabla u|^{2s+2}|\nabla\zeta|^2]dx\,dt+C'_s\,\mathrm{mes}\,K(2\rho)\frac{1}{\rho^2},\qquad(1)$$

由于

$$\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^{2s+4}\zeta^2dx=\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^{2s+2}\sum u_{x_i}[u(x,t)$$

$$-u(x^0,t)]_{x_i}\zeta^2dx=\int_{K(2\rho)}[u(x,t)-u(x^0,t)]$$

$$\cdot[|\nabla u|^{2s+2}\Delta u\zeta^2+|\nabla u|^{2s+2}\sum u_{x_i}2\zeta\zeta_{x_i}$$

$$+(2s+2)|\nabla u|^{2s}\sum u_{x_l}u_{x_lx_i}u_{x_i}\zeta^2]dx,$$

其中 x^0 为球 $K(2\rho)$ 的中心. 由于 $u(x,t)$ 满足 Hölder 条件，导出 $\dfrac{|u(x,t)-u(x^0,t)|}{|x-x^0|^\alpha}$ 为有界，故由上式得

$$\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^{2s+4}\zeta^2dx\leqslant C''_s\rho^\alpha\int_{K(2\rho)}\Big(\varepsilon|\nabla u|^{2s+4}\zeta^2$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}|\nabla u|^{2s}\sum_{k,i}u^2_{x_kx_i}\zeta^2+\frac{1}{\varepsilon}|\nabla u|^{2s+2}|\nabla\zeta|^2\Big)dx,$$

取 ε 小使 $\varepsilon C''_s=1/2$，则当 $\rho\leqslant 1$ 时由上式得：

$$\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^{2s+4}\zeta^2dx\leqslant C'''_s\rho^\alpha$$

$$\cdot\int_{K(2\rho)}\Big(|\nabla u|^{2s}\sum_{k,i}u^2_{x_kx_i}\zeta^2+|\nabla u|^{2s+2}|\nabla\zeta|^2\Big)dx,\qquad(2)$$

取 ρ 小使 $\rho<1$ 及 $C'''_sC_s\rho^\alpha\leqslant\nu/2$ 成立，结合 (1)、(2) 得到：

$$\frac{1}{s+1}\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^{2s+2}\zeta^2dx\Big|_0^t+\frac{\nu}{2}\int_0^t\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^{2s}\sum_{k,i}u^2_{x_kx_i}\zeta^2dx\,dt$$

$$\leqslant C_s\int_0^t\int_{K(2\rho)}|\nabla u|^{2s+2}|\nabla\zeta|^2dx\,dt+C'_s,$$

$$(s\geqslant 0),\qquad(3)$$

取 $\zeta = \zeta(x, \rho + \rho/2^s, \rho + \rho/2^{s+1})$，则当 $s = 0$ 时，(3) 式右端有界，由 (2) 得到 $\int_0^t \int_{K(2\rho)} |\nabla u|^4 \zeta^2 dx\,dt$ 有界，因而

$$\int_0^t \int_{K(3\rho/2)} |\nabla u|^4 dx\,dt \text{ 有界.}$$

当 $s = 1$ 时，(3) 式右端有界，由 (2) 得 $\int_0^t \int_{K(3\rho/2)} |\nabla u|^6 \zeta^2 dx\,dt$ 有界，因而

$$\int_0^t \int_{K(5\rho/4)} |\nabla u|^6 dx\,dt \text{ 有界.}$$

$\cdots$，$\int_0^t \int_{K(\rho+\rho/2^{s+1})} |\nabla u|^{2s+4} dx\,dt$ 有界 $(0 \leqslant s \leqslant s_0)$.

再代入 (1) 得

$$\int_{K(\rho)} |\nabla u|^{2s+2} dx \leqslant C_0, \quad (\rho \leqslant \rho_0,\ 0 \leqslant s \leqslant s_0),$$

其中 ρ_0, C_0 仅依赖于 s_0, M, $\mu(M)$, $\nu(M)$, u 的 Hölder 条件系数与 $\max\limits_{x\in\Omega} |\nabla\varphi(x)|$.

用上述估计为基础，可于 $K(\rho/2) \times [0, t] \equiv Q(\rho/2)$ 中估计 $|\nabla u|$. 记 $w(x, t) = \zeta^2(x, \rho, \rho/2)|\nabla u|^2$. 考察积分

$$-\int_0^t dt \int_{A_{\lambda,\rho}(t)} \sum_k \mathscr{L} u \frac{d}{dx_k} [(w - \lambda)\zeta^2 u_{x_k}] dx = 0$$

其中 $A_{\lambda,\rho}(t) = \{(x, t) \in K(\rho) | w > \lambda\}$，这里常数 $\lambda \geqslant 0$.

先设 u_{tx_i}, $D_x^2 u$ 连续，分部积分，再取极限，当 $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$ 时，下面式子成立:

$$\frac{1}{2} \int_{A_{\lambda,\rho}(t)} (w - \lambda)^2 dx \Big|_{t=0}^{t=t} + \int_0^t dt \int_{A_{\lambda,\rho}(t)} \Big\{ \sum \frac{da_i}{dx_k} \frac{d}{dx_i} \cdot [(w - \lambda)\zeta^2 u_{x_k}] + a \sum \frac{d}{dx_k} [(w - \lambda)\zeta^2 u_{x_k}] \Big\} dx = 0,$$

上式中第二积分对 t 可微，故第一积分也可微，微分得到:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_{\lambda,\rho}(t)} (w - \lambda)^2 dx + \int_{A_{\lambda,\rho}(t)} \Big\{ \sum \Big[\Big(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}} u_{x_k x_j} + \frac{\partial a_i}{\partial u} u_{x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \Big) (w_{x_i} \zeta^2 u_{x_k} + (w - \lambda) u_{x_k x_i} \zeta^2$$

$$+ (w-\lambda)u_{x_k}2\zeta\zeta_{x_i})\Big] + a\sum \frac{d}{dx_k}[(w-\lambda)u_{x_k}\zeta^2]\Big\}$$
$$\cdot dx = 0.$$

由上式得:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}(w-\lambda)^2dx + \frac{\nu}{2}\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}|\nabla w|^2dx + \nu$$
$$\cdot\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}(w-\lambda)\sum u^2_{x_kx_i}\zeta^2dx \leqslant \int_{A_{\lambda,\rho}(t)}\sum\Big\{\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}$$
$$\cdot[w_{x_i}|p|^2\zeta\zeta_{x_j} - u_{x_kx_j}(w-\lambda)u_{x_k}2\zeta\zeta_{x_i}]$$
$$-\sum\left(\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{x_k} + \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)[w_{x_i}\zeta^2u_{x_k} + (w-\lambda)u_{x_kx_i}\zeta^2$$
$$+ (w-\lambda)u_{x_k}2\zeta\zeta_{x_i}] - a\frac{d}{dx_k}[(w-\lambda)u_{x_k}\zeta^2]dx,$$

或

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}(w-\lambda)^2dx + \frac{\nu}{4}\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}|\nabla w|^2dx$$
$$\leqslant C\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}(|\nabla u|^6\zeta^2 + |\nabla u|^4|\nabla\zeta|^2)dx$$
$$+ C'\text{mes}A_{\lambda,\rho}(t),$$

其中 C, C' 与 ρ 有关，但当我们取 $(\rho_0/2)\leqslant\rho\leqslant\rho_0$，则由上式可见，$C$, C' 仅与 ρ_0 有关. 由于

$$\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}|\nabla u|^6dx \leqslant \left(\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}|\nabla u|^{2s+2}dx\right)^{\frac{3}{s+1}}\text{mes}^{\frac{s-2}{s+1}}A_{\lambda,\rho}(t)$$
$$\leqslant \left(\int_{K(\rho)}|\nabla u|^{2s+2}dx\right)^{\frac{3}{s+1}}\text{mes}^{\frac{s-2}{s+1}}A_{\lambda,\rho}(t)$$
$$\leqslant C\,\text{mes}^{1-\frac{2}{n}+\varepsilon}A_{\lambda,\rho}(t),$$

只要取 $\frac{3n}{2}-1<s\leqslant\frac{3n}{2}$，即有 $\varepsilon>0$ 使上式成立. 因此得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}(w-\lambda)^2dx + \frac{\nu}{4}\int_{A_{\lambda,\rho}(t)}|\nabla w|^2dx$$
$$\leqslant C\,\text{mes}^{1-\frac{2}{n}+\varepsilon}A_{\lambda,\rho}(t).$$

应用[49]抛物型方程部分§5，由线性弱解证明u为有界的证法，由上式得到ess sup$w$有上界，即ess sup$|\nabla u|$于$Q(\rho/2)=K(\rho/2)\times[0,T]$中为有界．因此除了近侧面部分外$|\nabla u|$为有界．

要证近侧面部分中∇u也为有界，先证在侧面上∇u为有界．由于$u|_S=0$，因此仅需证$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S$为有界即可（$N$为$S$的内法线方向）．为此要设$\partial\Omega\in C^2$，证明$\partial u/\partial N$在$S$的小片$S_1$上有界，经自变量$x=x(y)$的双方非奇异变换把这小片化直，而$\mathscr{L}u=u_t-\sum\frac{da_i}{dx_i}+a=0$化为$u_t-\sum\frac{d}{dy_i}\left(\sum_i a_i\frac{\partial y_i}{\partial x_j}+\tilde{a}\right)=0$，$\tilde{a}=a+\sum a_i\frac{d}{dy_i}\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)$．为了简单，变换后的变量仍记为$x$，且$\tilde{a}$仍记为$a$，侧面上被直化的小片$S_1=\partial\Omega_1\times[0,T]$设为在$x_n=0$上，且可设$\partial\Omega\setminus\partial\Omega_1$全在$x_n>0$内．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}u&=u_t-\sum\frac{da_i}{dx_i}+a\\&=u_t-\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}u_{x_ix_j}-\sum\frac{\partial a_i}{\partial u}p_i-\sum\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a=0\end{aligned}$$

经变换$u=\varphi(v)$，因而$u_{x_i}=\varphi' v_{x_i}$，$u_{x_ix_j}=\varphi' v_{x_ix_j}+\varphi'' v_{x_i}v_{x_j}$，$\mathscr{L}u=0$化为

$$\begin{aligned}L(u,v)&=v_t-\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}v_{x_ix_j}-\frac{\varphi''}{\varphi'}\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}v_{x_i}v_{x_j}\\&\quad-\frac{1}{\varphi'}\left(\sum\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{x_i}+\sum\frac{\partial a_i}{\partial x_i}-a\right)\\&=v_t-\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}v_{x_ix_j}+F=0,\end{aligned}$$

选取φ使$\varphi'>0$，$\varphi''<0$，则

$$\begin{aligned}F&\geqslant-\frac{\varphi''}{\varphi'}\nu|\nabla v|^2-\frac{3}{\varphi'}\mu(1+|\nabla u|^2)\\&=\left(-\frac{\varphi''}{\varphi'}\nu-3\mu\varphi'\right)|\nabla v|^2-\frac{3\mu}{\varphi'},\end{aligned}$$

取φ使$\varphi(0)=0$，$-\dfrac{\varphi''}{\varphi'}\nu-3\mu\varphi'\geqslant 0$，例如取

$$\varphi(v)=\frac{\nu}{3\mu}\log(1+v),\ \text{则}\ v=-1+e^{\frac{3\mu}{\nu}u},\ v|_S=0,$$

$$F\geqslant-\frac{3\mu}{\varphi'}=-\frac{9\mu^2}{\nu}e^{\frac{3\mu}{\nu}u}\geqslant-\frac{9\mu^2}{\nu}e^{\frac{3\mu M}{\nu}}\equiv-C.$$

考察函数$v(x)+me^{-x_n}(m>0)$，由于$v|_S=0$，$v+me^{-x_n}$在S上的最大值只能在S_1上取到．选取$m=\dfrac{2C}{\nu}e^d$，d为Ω的直径，则$v+me^{-x_n}$于Q中不取最大值，这是因为：

$$\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_i}(v+me^{-x_n})_{x_ix_j}-(v+me^{-x_n})_t$$

$$=F+m\frac{\partial a_n}{\partial p_n}e^{-x_n}\geqslant-C+m\nu e^{-d}=C>0,$$

因此$v+me^{-x_n}$于$\bar{Q}$中的最大值仅能在S_1上取到，在S_1上它为常数m．因此有：

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(v+me^{-x_n})\Big|_{S_1}=\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big|_{S_1}-m\leqslant 0,$$

即

$$\sup_{S_1}\frac{\partial v}{\partial x_n}\leqslant m=\frac{18\mu^2}{\nu^2}e^{\frac{3\mu M}{\nu}+d}.$$

再按

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{S_1}=\varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big|_{S_1}=\frac{\nu}{3\mu}\frac{\partial v}{\partial x_n}\Big|_{S_1}$$

估出$\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$于$S_1$有上界．

$\dfrac{\partial u}{\partial x_n}$于$S_1$有下界，可令$u=\varphi(v)=\dfrac{\nu}{3\mu}\log\dfrac{1}{1-v}$按同法估得．因此证明了$|\nabla u|$于$S_1$有界．由有限覆盖方法得到$|\nabla u|$于$S$有界．

再估计$\displaystyle\int_{\Omega\cap K(\rho)}|\nabla u|^{2s+2}dx$，$0\leqslant t\leqslant T$，$0\leqslant s\leqslant 3n/2$．$s=0$的情况要和$s>0$的情况稍作区别处理．先看$s=0$的情况．记

$\sup_S|\nabla u| = \sup_S\left|\frac{\partial u}{\partial N}\right| = M_2$. 记 $\Omega_{2\rho} = K(2\rho)\cap\Omega$，并设 $K(2\rho)$ 的中心在 $\partial\Omega$ 上。记

$$b(x,t)=\begin{cases}0, & |\nabla u(x,t)|^2\leqslant M_2^2,\\ |\nabla u|^2-M_2^2, & M_2^2<|\nabla u|^2<M_2^2+1,\\ 1, & |\nabla u|^2\geqslant M_2^2+1,\end{cases}$$

则 $b|_S = 0$，$b\zeta^2|_{\partial\Omega_{2\rho}} = 0$，其中 $\zeta(x)$ 为 $K(2\rho)$ 的截断函数。由

$$-\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\sum_k \mathscr{L}u\frac{d}{dx_k}(u_{x_k}b\zeta^2)dx\,dt = 0$$

及

$$\int b|p|_t^2dt = b|p|^2-\int|p|^2b_tdt = b|p|^2-\int(b+M_2^2)b_tdt$$
$$= b|p|^2-\frac{b^2}{2}-M_2^2b$$

得

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}}\left(|\nabla u|^2b-\frac{b^2}{2}-M_2^2b\right)\zeta^2dx\Big|_0^t$$
$$+\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\sum\left[\left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_kx_j}+\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{x_k}+\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)(u_{x_kx_i}b\zeta^2\right.$$
$$+u_{x_k}b_{x_i}\zeta^2+2u_{x_k}b\zeta\zeta_{x_i})+(a\Delta ub\zeta^2+u_{x_k}b_{x_k}\zeta^2$$
$$\left.+2u_{x_k}b\zeta\zeta_{x_k})\right]dx\,dt = 0,$$

因而

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}}|\nabla u|^2b\zeta^2dx|_{t=t}+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\sum\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_kx_j}u_{x_kx_i}b\zeta^2dx\,dt$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}\sum\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}b_{x_i}b_{x_j}\zeta^2dx\,dt$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}}|\nabla u|^2b\zeta^2dx|_{t=0}+\frac{1}{2}\int_{\Omega_{2\rho}}\left(\frac{b^2}{2}+M_2^2b\right)\zeta^2dx\Big|_{t=0}^{t=t}$$
$$+C\int_0^t\int_{\Omega'_{2\rho}}|\nabla u|^6\zeta^2dx\,dt+C\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}|\nabla u|^2b|\nabla\zeta|^2dx\,dt$$
$$+C\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}|\nabla u|^4b\zeta^2dx\,dt,$$

其中 $\Omega'_{2\rho}$ 为 $\Omega_{2\rho}$ 中 $|\nabla u|^2\leqslant M_2^2+1$ 的部分．由于 $0\leqslant b\leqslant 1$，上

式右端前三项为有界，第四项由于 $\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^2dx\,dt \leqslant C$ 为有界.为了估计最后一项，应用 Hölder 估计 $\max\limits_{\Omega_{2\rho}}|u(x,t)| \leqslant C\rho^\alpha$ 分部积分得:

$$\int_{\Omega_{2\rho}}|\nabla u|^4 b\zeta^2 dx = \int_{\Omega_{2\rho}}\sum u_{x_k}^2|\nabla u|^2 b\zeta^2 dx$$
$$= -\int_{\Omega_{2\rho}} u[\Delta u|\nabla u|^2 b\zeta^2 + 2\sum u_{x_k}u_{x_i}u_{x_kx_i}b\zeta^2$$
$$+ \sum u_{x_k}|\nabla u|^2 b_{x_k}\zeta^2 + \sum 2u_{x_k}|\nabla u|^2 b\zeta\zeta_{x_k}]dx$$
$$\leqslant C_1\rho^\alpha\int_{\Omega_{2\rho}}(\sum u_{x_kx_i}^2 b\zeta^2 + |\nabla b|^2\zeta^2)dx$$
$$+ C_1\rho^\alpha\int_{\Omega_{2\rho}}|\nabla u|^4 b\zeta^2 dx + C_1,$$

取 $\rho^\alpha = \min\left(\frac{1}{2C_1}, \frac{\nu}{8CC_1}\right)$，由上面二式得出

$$\int_{\Omega_{2\rho}}|\nabla u|^2 b\zeta^2 dx|_{t=t} + \frac{\nu}{4}\int_0^t\int_{\Omega_{2\rho}}(\sum u_{x_kx_i}^2 b\zeta^2$$
$$+ |\nabla b|^2\zeta^2)dx\,dt \leqslant C_2,$$

由此即得

$$\int_{\Omega_{2\rho}}|\nabla u|^2\zeta^2 dx \leqslant C, \quad \int_{\Omega_\rho}|\nabla u|^2 dx \leqslant C.$$

估计 $\int_{\Omega\cap K(\rho)}|\nabla u|^{2s+2}dx\,(s>0)$ 可稍简单一些，由

$$-\int_0^t dt\int_{A_{M_2,2\rho}(t)}\sum_{k=1}^n \mathscr{L}u\,\frac{d}{dx_k}[(|\nabla u|^2 - M_2^2)^s u_{x_k}\zeta^2]dx = 0$$

出发即可，其中 $A_{M_2,2\rho}(t) = \{x\in K(2\rho)\cap\Omega\,|\,|\nabla u| > M_2\}$.

在 $\left\{K\left(\frac{\rho}{2}\right)\cap\Omega\right\}\times[0,T]$ 中估计 $\max|\nabla u|$ 的做法和前面一样，把所得结果写为:

定理 2 当解 $u\in C^{2,1}(\bar{Q})$, $\max\limits_{\bar{Q}}|u| \leqslant M$, $\partial\Omega\in C^2$, a_i、a 满足

$$\nu(M)|\xi|^2 \leqslant \sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \leqslant \mu(M)|\xi|^2, \quad \forall\xi\in \boldsymbol{R}^n,$$

$$\sum|a_i|(1+|p|)+|a|+\sum\left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right|(1+|p|^2)$$

$$+\sum\left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|(1+|p|)+\sum\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right|\leqslant\mu(M)(1+|p|^2),$$

则 $\max\limits_{\bar{Q}}|\nabla u|\leqslant M_1$, M_1 可由 M, $\max\limits_{\bar{\Omega}}|\nabla u(x,0)|$, μ, ν 及 $\partial\Omega$ 的 C^2 系数估出. 当 $\bar{\Omega}'\subset\Omega$ 时, $\bar{Q}'=\bar{\Omega}'\times[0,T]$ 中的 $\max\limits_{\bar{Q}'}|\nabla u|$ 可由 M, μ, ν, $\max\limits_{\bar{\Omega}'}|u(x,0)|$ 及 $\delta=d(\Omega',\partial\Omega)$ 估出.

§3 D_xu 的 Hölder 条件估计

再考察 $u_{x_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 满足 Hölder 条件的问题. 方程

$$\mathscr{L}u=u_t-\sum\frac{d}{dx_i}a_i(x,t,u,u_{x_k})+a(x,t,u,u_{x_k})=0$$

对 x_l 微分并记 $u_{x_l}=v$ 得:

$$v_t-\sum\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}v_{x_j}+\frac{\partial a_i}{\partial u}v+\frac{\partial a_i}{\partial x_l}-\delta_{il}a\right)=0,$$

这是 v 的具有界系数的线性方程, 因此 $u_{x_l}\in\mathscr{B}_2(Q,M_1,\gamma_2,\nu_2,\infty,0)$, 其中 γ_2, ν_2 仅与 $M=\max\limits_{\bar{Q}}|u|$, $M_1=\max\limits_{\bar{Q}}|\nabla u|$,

$$\max_{(x,t)\in\bar{Q}}\left\{\max_{\substack{|u|\leq M\\|p|\leq M_1\\1\leq i,k\leq n}}\left|a(x,t,u,p_k),\ a_i(x,t,u,p_k),\ \frac{\partial a_i}{\partial x_k},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\partial a_i}{\partial u},\ \frac{\partial a_i}{\partial p_k}\right|,\ \max_{|\xi|=1}\left(\sum\frac{\partial a_i(x,t,u,p_k)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\right)^{-1}\right\}$$

有关. 由定理 2 中 a_i, a 满足的两个条件,知仅与 μ, ν, M, M_1 有关.

因此存在 $\alpha>0$, 使 $|u_{x_i}|_{\alpha,Q'}$ 为有界, α 与 $|u|_{\alpha,Q'}$ 仅与上述量及 $|u_{x_i}(x,0)|$, $d(\Omega',\Omega)$ 有关,其中 $\bar{\Omega}'\subset\Omega$, $Q'=\Omega'\times[0,T]$.

内闭的结果不够用,还要得到 $u_{x_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 近边的 Hölder 估计. 直接得到近边的估计有困难,因为边界 S 上 $\partial u/\partial N$ 是否满足 Hölder 条件是不知道的. 克服这一困难的办法是先证 u_t 及 u_{x_τ} (τ 表示切向)都满足 Hölder 条件,再导出 $\partial u/\partial N$ 满足 Hölder

条件.

证明 u_t 为有界及满足 Hölder 条件要添加一些光滑性假设如下:

$$u\in C^{2,1}(\bar{Q}),\text{ 当 }(x,t)\in\bar{Q}\text{ 时}, |u|\leqslant\max_{\bar{Q}}|u|\leqslant M,$$

$$|p|=(\sum p_k^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\max_{\bar{Q}}|\nabla u|\leqslant M_1,$$

又设 $a_i(x,t,u,p_k)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 与 $a(x,t,u,p_k)$ 对 t 满足 Lip 条件, a_i 对 x, u, p_k 可微, a 对 u, p_k 可微. 当 (x,t), $(x,t+h)\in\bar{Q}$, $|u|\leqslant M$, $|p|\leqslant M_1$, $1\leqslant i,j\leqslant n$ 时,

$$\max\left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j},\ \frac{\partial a_i}{\partial u},\ \frac{\partial a_i}{\partial x_j},\ a,\ \frac{\partial a}{\partial p_i},\ \frac{\partial a}{\partial u},\right.$$

$$\frac{a_i(x,t+h,u,p_k)-a_i(x,t,u,p_k)}{h},$$

$$\left.\frac{a(x,t+h,u,p_k)-a(x,t,u,p_k)}{h}\right|\leqslant C(M,M_1),$$

$$\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\geqslant\nu(M,M_1)|\xi|^2,\ \ \forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,\ \ \nu(M,M_1)>0.$$

引理 1 当上述条件满足时, $\max\limits_{\bar{Q}}|u_t|$ 有界. 这界仅与 $\max\limits_{\partial Q^*}|u_t|$, M, M_1, $C(M,M_1)$, $\nu(M,M_1)$ 有关. $|u_t|_{\alpha,Q'}$ 对某 $\alpha>0$ 为有界, α 与 Hölder 条件的界仅与上述量及 $d(Q',\partial Q)$ 有关 (内闭估计). 当 ∂Q 满足条件 (A), 且 u_t 于 ∂^*Q 上满足 Hölder 条件, 则 $|u_t|_{\alpha,Q}$ 有界, α 及 Hölder 条件的界可由上述量, $|u_t|_{\beta,\partial Q^*}$ $(\beta>0)$ 及条件 (A) 的 a_0, θ_0 估出.

证 于 Q_{T-h} 中考察差分变量

$$v_h(x,t)=\frac{1}{h}[u(x,t+h)-u(x,t)],$$

方程

$$\mathscr{L}u=u_t-\sum\frac{da_i}{dx_i}+a=0$$

对 t 作差分成为

$$\frac{\Delta \mathscr{L} u}{h} \equiv \frac{\partial v_h}{\partial t} - \frac{d}{dx_i}\frac{\Delta a_i}{h} + \frac{\Delta a}{h} = 0,$$

其中

$$\frac{\Delta a_i}{h} = \frac{1}{h}\{a_i(x, t+h, u(x, t+h), u_{x_k}(x, t+h))$$
$$- a_i(x, t, u(x, t), u_{x_k}(x, t))\}$$
$$= \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau} a_i(x, t+h, \tau u(x, t+h)$$
$$+ (1-\tau)u(x, t), \tau u_{x_k}(x, t+h)$$
$$+ (1-\tau)u_{x_k}(x, t))d\tau + \frac{1}{h}\{a_i(x, t$$
$$+ h, u(x, t), u_{x_k}(x, t) - a_i(x, t, u(x, t), u_{x_k}(x, t))\}$$
$$= v_{hx_j}\int_0^1 \frac{\partial a_i(\quad)}{\partial u_{x_j}} d\tau + v_h\int_0^1 \frac{\partial a_i(\quad)}{\partial u} d\tau + \frac{1}{h}\{\quad\}$$
$$\equiv \sum_j a_{ij}v_{hx_j} + b_i v_h + d_i,$$

同法得

$$\frac{\Delta a}{h} = \sum c_i v_{hx_i} + c v_h + d,$$

故得

$$\frac{\partial v_h}{\partial t} - \sum_i \frac{d}{dx_i}\Big(\sum_j a_{ij}v_{hx_j} + b_i v_h + d_i\Big)$$
$$+ \sum c_i v_{hx_i} + c v_h + d = 0,$$

这是 v_h 所满足的线性抛物型方程，具有界系数，系数的界与 $h(0 < h \leqslant h_0$ 时)无关．严格地说上式写法不是真正的等式，真正的等式要写为积分式．但线性抛物方程的弱解正是用积分式定义的．

应用线性抛物方程的结果，v_h 有界且满足 Hölder 条件(对 h 一致)．$h \to 0$ 时就证明了引理 1.

再考察 $u_{x_k}(1 \leqslant k \leqslant n)$ 于 Q 满足 Hölder 条件的问题．内闭加近底面部分已证明为真，因此仅需考察近侧面部分．设 $\partial Q \in C^2$，做自变量的 C^2 双方非奇变换 $x \to y$ 使 ∂Q 的小片变为 $y_n = 0$

上的小片$\partial\Omega_1$，设$\partial\Omega_1\times(0, y_n^0)$在变换后的区域内（变量$t$不考虑）。设$\xi$为$\partial\Omega_1\times(0, y_n^0)$中具紧支集的函数。方程$u_t-\sum\frac{da_i}{dx_i}+a=0$乘$\frac{\partial\xi}{\partial y_l}$ $(1\leqslant l\leqslant n-1)$积分得：

$$
\begin{aligned}
0&=\int_\Omega\left[-\sum a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y_l}\right)-(a+u_t)\frac{\partial\xi}{\partial y_l}\right]dx\\
&=\int_\Omega\left[-\sum a_i\frac{\partial^2\xi}{\partial y_l\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}-(a+u_t)\frac{\partial\xi}{\partial y_l}\right]Jdy\\
&=\int_\Omega\sum\left[\frac{da_i}{dy_l}\frac{\partial\xi}{\partial x_i}J+a_i\frac{\partial\xi}{\partial y_m}\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i\partial y_l}J\right.\\
&\qquad\left.+a_i\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\frac{\partial J}{\partial y_l}-(a+u_t)\frac{\partial\xi}{\partial y_l}J\right]dy\\
&=\int_\Omega\sum\left\{\left[\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}\left(u_{y_lx_j}-u_{x_m}\frac{\partial^2x_m}{\partial y_l\partial x_j}\right)+\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{y_l}+\frac{\partial a_i}{\partial y_l}\right]\right.\\
&\qquad+a_j\frac{\partial^2y_m}{\partial x_j\partial y_l}\frac{\partial x_i}{\partial y_m}+a_iJ^{-1}\frac{\partial J}{\partial y_l}\\
&\qquad\left.-(a+u_t)\frac{\partial x_i}{\partial y_l}\right\}\frac{\partial\xi}{\partial x_i}dx,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中$J=\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}$. 上面最后等式的成立，是由于

$$u_{x_jy_l}=\sum u_{x_jx_m}\frac{\partial x_m}{\partial y_l},$$

$$u_{y_lx_j}=\left(\sum u_{x_m}\frac{\partial x_m}{\partial y_l}\right)_{x_j}=u_{x_mx_j}\frac{\partial x_m}{\partial y_l}+u_{x_m}\frac{\partial^2x_m}{\partial y_l\partial x_j},$$

因此

$$u_{x_jy_l}=u_{y_lx_j}-u_{x_m}\frac{\partial^2x_m}{\partial y_l\partial x_j}.$$

我们记

$$v=u_{y_l},\quad a_{ij}=\frac{\partial a_i(x,t,u,u_{x_k})}{\partial u_{x_j}},$$

$$f_i^l=\sum_{m,j}\left[-\frac{\partial a_i}{\partial u_{x_j}}u_{x_m}\frac{\partial^2x_m}{\partial y_l\partial x_j}+\frac{\partial a_i}{\partial u}u_{y_l}+\frac{\partial a_i}{\partial y_l}\right.$$

$$+ a_i \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_j \partial y_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_m} + a_i J^{-1} \frac{\partial J}{\partial y_l} - (a + u_t) \frac{\partial x_i}{\partial y_l}\Big],$$

则 (4) 成为

$$\sum \int_\Omega (\sum a_{ij} v_{x_j} + f_i^l) \xi_{x_i} dx = 0,$$

或

$$\sum \frac{d}{dx_i} (\sum a_{ij} v_{x_j} + f_i^l) = 0.$$

当 t 固定时，v 是具有界系数线性椭圆方程的解．因此由于边值 $u|_{\partial\Omega_1} = 0$，故 $v|_{\partial\Omega_1} = 0$．应用 [49] 椭圆型方程部分 § 11 的结果得到，在近 $\partial\Omega_1$ 部分 v 满足 Hölder 条件，即 $u_{y_1}, \cdots, u_{y_{n-1}}$ 在近 $\partial\Omega_1$ 部分满足 Hölder 条件，Hölder 条件指数与系数仅由引理 1 中诸量估出．

还要导出 u_{y_n} 也满足 Hölder 条件．用 Hölder 条件与积分不等式互化的办法如下：

以 $\partial\Omega_1$ 的任一点 $(y_1^0, \cdots, y_{n-1}^0, 0)$ 为中心，2ρ 为半径作球 $K_{2\rho}$，记 $K_{2\rho} \cap \{y_n > 0\} = \Omega_{2\rho}$．设 ζ 为 $K_{2\rho}$ 中的截断函数，使 $\zeta|_{K(\rho)} = 1$，则令 $\xi = v\zeta^2 (v = u_{x_l} (l \neq n))$ 代入 v 所满足的关系式得：

$$\int_\Omega \sum [a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} \zeta^2 + a_{ij} v v_{x_j} 2\zeta\zeta_{x_j} + f_i^l (v_{x_i} \zeta^2 + v \cdot 2\zeta\zeta_{x_i})] dx = 0,$$

因而

$$\nu \int_{\Omega_{2\rho}} |\nabla v|^2 \zeta^2 dx \leqslant \varepsilon \int_{\Omega_{2\rho}} |\nabla v|^2 \zeta^2 dx + \frac{C}{\varepsilon} \int_{\Omega_{2\rho}} v^2 |\nabla \zeta|^2 dx + C \operatorname{mes} \Omega_{2\rho}.$$

取 $\varepsilon = \nu/2$．并应用

$$\max_{\Omega_{2\rho}} |v| = \max_{\Omega_{2\rho}} |u_{y_l}| \leqslant C\rho^\alpha, \quad |\nabla\zeta| \leqslant \frac{C}{\rho},$$

因此得到：

$$\int_{\Omega_{2\rho}} |\nabla u_{y_l}|^2 \zeta^2 dx \leqslant C\rho^{n-2+2\alpha},$$

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_{y_l}|^2 dx \leqslant C\rho^{n-2+2\alpha}, \quad (l = 1, 2, \cdots, n-1).$$

由方程 $\sum_{i,k}\frac{da_i}{dy_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}-(a+u_t)=0$ 解 $u_{y_ny_n}$ 得:

$$u_{y_ny_n}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n-1}b_{li}u_{y_ly_i}+b,$$

b_{li}, b 为有界函数,故得

$$\int_{\Omega_\rho}|\nabla v|^2dy=\int_{\Omega_\rho}|\nabla u_{y_n}|^2dy\leqslant C\rho^{n-2+2\alpha},\quad (v=u_{y_n}),$$

偶延拓 v 到 $y_n<0$ 得到

$$\int_{K(\rho)}|\nabla v|^2dy\leqslant C\rho^{n-2+2\alpha}.$$

上面证明了 $K(\rho)$ 中心在 $y_n=0$ 上时,这一估计式成立. 当 $K(\rho)$ 与 $y_n=0$ 不相交,令 $\xi=(v-v^*)\zeta^2$, 其中 v^* 为 v 在 $K(\rho)$ 中心的数值,同样可得到上面估计式成立. 当 $\overline{K(\rho)}$ 与 $y_n=0$ 相交,$K(\rho)$ 包含在以相交部分中心点为球心,半径为 2ρ 的球内,类似地也得到上面估计式成立. 因而 K_ρ 中心可在 $\partial\Omega_1$ 附近的任意点使上面估计式成立. 记 $\sigma(\rho)=\int_{K(\rho)}|\nabla v(y)|dy$, 则有:

$$\sigma(\rho)\leqslant C\left[\rho^n\int_{K(\rho)}|\nabla v|^2dy\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant C\rho^{n-1+\alpha}.$$

由 Соболев 分解式, $\forall y\in K_\rho$ 有:

$$\left|v(y)-\int_{K(\rho)}\zeta_0(z)v(z)dz\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{K(\rho)}\frac{\omega_i(y,z)}{|y-z|^{n-1}}D_iv(z)dz\right|$$

$$\leqslant C\int_0^{2\rho}\xi^{-n+1}\sigma'(\xi)d\xi=C\left[\xi^{-n+1}\sigma(\xi)\Big|_0^{2\rho}\right.$$

$$\left.+(n-1)\int_0^{2\rho}\xi^{-n}\sigma(\xi)d\xi\right]\leqslant C_1\rho^\alpha.$$

因此 $\forall y_1, y_2\in K(\rho)$ 有

$$|v(y_2)-v(y_1)|\leqslant\left|v(y_2)-\int_{K(\rho)}\zeta_0(z)v(z)dz\right|$$

$$+\left|\int_{K(\rho)}\zeta_0(z)v(z)dz-v(y_1)\right|\leqslant C_2\rho^\alpha.$$

上面已证得于 $\bar{Q}$, $u_{x_k}(1\leqslant k\leqslant n)$ 对 x 满足 Hölder 条件. u_{x_k} 对 t 满足 Hölder 条件由下面引理得出.

引理 2 当 $\operatorname{osc}\{u_{x_k},\ K(\rho)\cap\Omega\}\leqslant\mu\rho^{\alpha}$，$1\leqslant k\leqslant n$，$x\in\Omega$，$0\leqslant t\leqslant T$，$\alpha>0$，

$|u(x,t^2)-u(x,t^1)|\leqslant\mu_1|t^2-t^1|^{\beta}$，$x\in\Omega$，$0\leqslant t^1, t^2\leqslant T$，$\beta>0$，

则 u_{x_k} 对 t 满足 Hölder 条件，指数 $\delta=\dfrac{\alpha\beta}{1+\alpha}$，系数仅依赖于 α，β，μ，μ_1 与 $S=\partial\Omega\times[0,T]$.

证 当二点 x^1，x^2 连成的线段在 $\bar{\Omega}$ 内时，记 $x^2-x^1=|x^2-x^1|l$，则由中值定理得：

$$u(x^2,t^1)-u(x^1,t^1)=(x^2-x^1)\frac{\partial u}{\partial l}(x^1+\theta(x^2-x^1),t^1),$$

$$0<\theta<1,$$

$$\left|\frac{u(x^2,t^1)-u(x^1,t^1)}{x^2-x^1}-\frac{\partial u}{\partial l}(x^1,t^1)\right|\leqslant\mu|x^2-x^1|^{\alpha},$$

同法得到：

$$\left|\frac{u(x^2,t^2)-u(x^1,t^2)}{x^2-x^1}-\frac{\partial u}{\partial l}(x^1,t^2)\right|\leqslant\mu|x^2-x^1|^{\alpha},$$

上面二式相减得：

$$\left|\frac{\partial u}{\partial l}(x^1,t^2)-\frac{\partial u}{\partial l}(x^1,t^1)\right|\leqslant 2\mu|x^2-x^1|^{\alpha}$$

$$+\left|\frac{u(x^2,t^2)-u(x^1,t^2)-u(x^2,t^1)+u(x^1,t^1)}{x^2-x^1}\right|$$

$$\leqslant 2\mu|x^2-x^1|^{\alpha}+2\mu_1\frac{|t^2-t^1|^{\beta}}{|x^2-x^1|}=2(\mu+\mu_1)|t^2-t^1|^{\frac{\alpha\beta}{1+\alpha}},$$

当我们选取 $|x^2-x^1|=|t^2-t^1|^{\frac{\beta}{1+\alpha}}$ 时，上式成立.

由于近边二点连线不一定落在 $\bar{\Omega}$ 内，因此要证 $u_{x_k}(1\leqslant k\leqslant n)$ 满足 Hölder 条件，应做 C^2 双方非奇异变换 $x=x(y)$，把 $\partial\Omega$ 的一部分变为 $y_n=0$ 上的一部分，因而得到，在这部分近旁 $u_{y_k}(1\leqslant k\leqslant n)$ 对 t 满足 Hölder 条件，做逆变换并作有限覆盖，得到 u_{x_k} $(k=1,2,\cdots,n)$ 对 t 满足 Hölder 条件. 引理证毕.

把上述结果写成下面的定理(注意到证明 u_{x_k} 满足 Hölder 条

件时，仅用到 u_t 的有界性，并未用到 u_t 满足 Hölder 条件）。

定理 3 $u(x, t)\in C^{2,1}(Q)$ 为

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=u_t-\sum\dfrac{da_i(x, t, u, u_{x_k})}{dx_i}+a(x, t, u, u_{x_k})=0,\\ u|_S=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad (x\in\Omega)\end{cases}$$

的解。设 $\max\limits_{\bar{Q}}|u|=M$，$\max\limits_{\bar{Q}}|\nabla u|=M_1$，且当 $(x, t)\in\bar{Q}$，$|u|\leqslant M$，$|p|\leqslant M_1$，$1\leqslant i, j\leqslant n$ 时，

$$\max\left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}, \frac{\partial a_i}{\partial u}, \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, \frac{\partial a}{\partial p_i}, \frac{\partial a}{\partial u},\right.$$

$$\frac{a_i(x, t+h, u, p_k)-a_i(x, t, u, p_k)}{h},$$

$$\left.\frac{a(x, t+h, u, p_k)-a(x, t, u, p_k)}{h}\right|\leqslant C(M, M_1),$$

$$\sum\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\geqslant\nu(M, M_1)|\xi|^2, \quad \forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,$$

再设 $\partial\Omega\in C^2$，则 α 与 $|u_{x_k}|_{\alpha,\bar{Q}}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 由 M，M_1，$C(M, M_1)$，$\nu(M, M_1)$，$\max\limits_{\Omega}|u_t(x, 0)|\left(u_t(x, 0)=\sum\dfrac{da_i}{dx_i}(x, 0, \varphi(x), \varphi_{x_k}(x))-a(x, 0, \varphi(x), \varphi_{x_k}(x)\right)$ 以及 $\partial\Omega$ 的 C^2 模估出.

§4 第一边值问题解的存在性与唯一性

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=u_t-\sum\dfrac{da_i(x, t, u, u_{x_k})}{dx_i}+a(x, t, u, u_{x_k})=0,\\ u|_S=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad x\in\Omega.\end{cases}$$

此方程称为具散度结构头部的抛物型方程（在条件 $\sum\dfrac{\partial a_i}{\partial p_j}\xi_i\xi_j>0$，$\forall\xi\in\boldsymbol{R}^n$ 成立时）。

把方程写成

$$u_t - \sum \frac{\partial a_i(x, t, u, u_{x_k})}{\partial u_{x_j}} u_{x_i x_j} + A(x, t, u, u_{x_k}) = 0,$$

其中

$$A(x, t, u, u_{x_k}) = a(x, t, u, u_{x_k}) - \sum \frac{\partial a_i(x, t, u, u_{x_k})}{\partial u} u_{x_i} - \sum \frac{\partial a_i(x, t, u, u_{x_k})}{\partial x_i}.$$

非线性方程定解问题求解的方法之一是用线性方程逼近，然后作为泛函方程解的不动点．具体地说，给定适当的函数 $w(x, t)$，作出线性定解问题

$$\begin{cases} v_t - \sum \dfrac{\partial a_i(x, t, w, w_{x_k})}{\partial w_{x_i}} v_{x_i x_j} + A(x, t, w, w_{x_k}) = 0, \\ v|_S = 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x), \quad (x \in \Omega). \end{cases}$$

这一定解问题的解记为 $v = \Phi(w)$．泛函方程 $\Phi(w) = w$ 的解，称为映象 Φ 的不动点，就是非线性定解问题的解 $u(x, t)$．

要证明映象 Φ 有不动点或 $(I - \Phi)w = 0$ 有解（其中 I 为恒等算子）有几种方法：压缩映象原理，Schauder 不动点定理，Leray-Schauder 拓扑度定理，应选用哪一个呢？我们在今后几章中，举出应用这几个常用的不动点定理的例子，使大家能明了各自使用的特点．现在用 Leray-Schauder 不动点定理（又称连续映象的拓扑度定理）．定理内容是：

给定 Banach 空间H及H内的有界闭集 $\bar{\mathscr{M}}$．$\bar{\mathscr{M}}$ 要设为是有界开集 $\mathscr{M}$ 的闭包．给定含参数 τ 的映象 $v = \Phi(w, \tau)$，$(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$，映 $\bar{\mathscr{M}}$ 入 $\bar{\mathscr{M}}$，满足以下诸条件：

(i) $\Phi(w, \tau)$ 是紧映象，即映象对 $w \in \bar{\mathscr{M}}$ 连续，而象集是紧集．

(ii) 当 $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ 时，$\Phi(w, \tau)$ 对 τ 为一致连续．

(iii) 当 $\tau = 0$ 时，$(I - \Phi)w = 0$ 的解为有限个，且解的指数和不为零．

(iv) $\partial\mathscr{M}$ 不是 $(I - \Phi)w = 0$ 的解，对任何 $0 \leqslant \tau \leqslant 1$．

在上述条件下，$(I-\Phi)w=0$ 解的指数和对参数 τ 为拓扑不变量. 因此当 $\tau=1$ 时，$(I-\Phi)w=0$ 有解，即映象 $v=\Phi(w,1)$ 有不动点.

要应用 Leray-Schauder 不动点定理于我们的情况，作出 $v=\Phi(w,\tau)$ 为下列定解问题的解

$$
\begin{cases}
v_t-\sum_{i,j}\left[\tau\dfrac{\partial a_i(x,t,w,w_{x_k})}{\partial w_{x_j}}+(1-\tau)\delta_{ij}\right]v_{x_ix_j} \\
\qquad +\tau A(x,t,w,w_{x_k})=0, \\
v|_S=0, \\
v|_{t=0}=\tau\varphi(x),
\end{cases}
$$

其中

$$
\delta_{ij}=\begin{cases}1, & (i=j),\\ 0, & (i\neq j).\end{cases}
$$

Banach 空间取为 H_δ: w, $w_{x_i}\in C^{\delta,\delta/2}(Q)$，范数为

$$
|w|_{H_\delta}=|w|_{\delta,Q}+\sum_{i=1}^{n}|w_{x_i}|_{\delta,Q},
$$

其中

$$
|w|_{\delta,Q}=\sup_{(x,t)\in Q}|w|+\sup_{(x,t),(x',t')\in Q}\frac{|w(x,t)-w(x',t')|}{(|x-x'|^2+|t-t'|)^{\delta/2}},
$$

δ 将于下面适当地取定.

如何取定 $\mathscr{M}$? 要考察 $v=\Phi(w,\tau)$ 的不动点集合 $u^\tau=\Phi(u^\tau,\tau)$，即 u^τ 满足

$$
\begin{cases}
\mathscr{L}_\tau u=\tau\mathscr{L}u+(1-\tau)(u_t-\Delta u) \\
\qquad \equiv u_t-\sum\dfrac{d}{dx_i}[\tau a_i(x,t,u,u_{x_k})+(1-\tau)u_{x_i}] \\
\qquad\qquad +\tau a(x,t,u,u_{x_k})=0, \\
u|_S=0, \\
u|_{t=0}=\tau\varphi(x), \quad x\in\Omega.
\end{cases}
$$

当条件

$$
u\left[-\sum\frac{\partial a_i(x,t,u,0)}{\partial x_i}+a(x,t,u,0)\right]\geqslant -b_1u^2-b_2,
$$
$$
(b_1\geqslant 0,\ b_2\geqslant 0), \tag{5}
$$

$$\sum \frac{\partial a_i(x,t,u,p_k)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j\Big|_{p=0} \geqslant 0, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

$\forall (x,t,u) \in \bar{Q} \times \boldsymbol{R}$ 满足时有:

$$\tau u\left[-\sum \frac{\partial a_i(x,t,u,0)}{\partial x_i} + a(x,t,u,0)\right] \geqslant -b_1 u^2 - b_2,$$

$$(0 \leqslant \tau \leqslant 1),$$

$$\sum\left[\tau \frac{\partial a_i}{\partial p_j} + (1-\tau)\right]\xi_i\xi_j|_{p=0} \geqslant 0, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

因此当 $u^\tau \in C^{2,1}(\bar{Q})$ 时, u^τ 有最大模估计:

$$\max_{\bar{Q}}|u^\tau| \leqslant \min_{b \geqslant b_1} e^{bT}\left[\max_{\bar{Q}}|\varphi(x)| + \left(\frac{b_2}{b-b_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = M.$$

当条件

$$\sum \frac{\partial a_i(x,t,u,p_k)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant \nu(|u|)|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

$$\sum_i\left(|a_i| + \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|\right)(|p|+1) + \sum_{i,j}\left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right|(|p|^2+1)$$
$$+ |a| + \sum_{i,j}\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right| \leqslant \mu(|u|)(|p|^2+1) \qquad (6)$$

对 $(x,t,u,p) \in Q \times [-M, M] \times \boldsymbol{R}^n$ 满足时, 则 (6) 中 a_i 用 $a_i^\tau = \tau a_i + (1-\tau)p_i$ 代替, a 用 $a^\tau = \tau a$ 代替, (6) 仍然成立, 但 $\nu(|u|)$ 要换为 $\min(\nu(|u|, 1)$, $\mu(|u|)$ 要换为 $\max(\mu(|u|), 1)$.

过去用到的式子 $\sum a_i(x,t,u,p_k)p_i \geqslant \nu_1(|u|)|p|^2 - \mu_1(|u|)$, 是可由其它式子导出的. 由上面条件得到, 当 $u^\tau \in C^{2,1}(\bar{Q})$ 时, $\max_{\bar{Q}}|\nabla u^\tau(x,t)| \leqslant M_1\ (0 \leqslant \tau \leqslant 1)$, 其中 M_1 仅与 $\mu(M)$, $\nu(M)$ 及 $\partial\Omega$ 的 C^2 系数, $\max_{\Omega}|\varphi(x)|$ 有关.

要定出 $\mathscr{M}$, 还要再加上一些条件, 才可得出解为存在唯一. 写为定理如下:

定理 4 设下面条件满足:

a) $\partial\Omega \in C^{2+\beta}(\beta > 0)$.

b) $\varphi \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$, 且满足下面二个相容性条件

$$\varphi|_{\partial\Omega}=0,\ \left[-\sum\frac{da_i(x,0,\varphi(x),\varphi_{x_k}(x))}{dx_i}\right.$$
$$\left.+a(x,0,\varphi(x),\varphi_{x_k}(x))\right]_{\partial\Omega}=0,$$

c）设条件(5)满足，由上面可定出 M.

d）设条件(6)满足，由上面可定出 M_1.

e）当 $(x,t)\in Q$, $|u|\leqslant M$, $|p|=(\sum u_{x_k}^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant M_1$ 时，函数 a_i, a, $\frac{\partial a_i}{\partial p_i}$, $\frac{\partial a_i}{\partial u}$, $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ 为 (x,t,u,p) 的 Hölder 连续函数，指数为 β, $\beta/2$, β, β.

f）当 $(x,t)\in Q$, $|u|\leqslant M$, $|p|\leqslant M_1$ 时，a_i 与 a 对 t 满足 Lip 条件，$a(x,t,u,p_k)$ 对 u 与 p_k 可微，且 Lip 常数，$\left|\frac{\partial a}{\partial u}\right|$, $\left|\frac{\partial a}{\partial p_k}\right|$ 小于某常数 C.

则

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=0,\\ u|_S=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

的解于 $u\in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q})$ 中为存在、唯一，且 $u_{x_kt}\in L^2(Q)(1\leqslant k\leqslant n)$.

证 继续对不动点 u^τ 作考察. 当 $u^\tau\in C^{2,1}(\bar{Q})$ 时，有:

$$\max_Q|u^\tau|\leqslant M,\ \max_Q|\nabla u^\tau|\leqslant M_1,$$
$$|u^\tau|_{\alpha,Q}+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^\tau|_{\alpha,Q}\leqslant M_2,$$

其中 M, M_1, α, M_2 均由定理中出现的常数定出. 取定 H 使 $\delta\leqslant\alpha<1$ 即可. 取定 $\mathscr{M}$ 为

$$\max_Q|w|\leqslant M+\varepsilon,\ \max_Q|\nabla w|\leqslant M_1+\varepsilon,$$
$$|w|_{\delta,Q}+\sum_{i=1}^n|w_{x_i}|_{\delta,Q}\leqslant M_2+\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon>0$. 添加 ε 是为了使不动点不落在 $\partial\mathscr{M}$ 上. 在有必要

时，要对函数 $a_i(x, t, u, p_k)$, $a(x, t, u, p_k)$ 在 $M \leqslant |u| \leqslant M + \varepsilon$, $M_1 \leqslant |p| \leqslant M_1 + \varepsilon$ 的部分作一些改变，使当 $(x, t) \in Q$, $|u| \leqslant M + \varepsilon$, $|p| \leqslant M_1 + \varepsilon$ 时，条件 $c)$, $d)$, $e)$, $f)$ 仍然成立. 要做到这一点，只要向外作线性延拓即可.

现在来验证 Leray-Schauder 定理的诸条件.

显然 $\mathscr{M} \subset H_\delta$ 为有界闭集. 由于 $\mathscr{M}$ 为凸集，即 $w_1 \in \mathscr{M}$, $w_2 \in \mathscr{M}$ 导出 $(1-\theta)w_1 + \theta w_2 \in \mathscr{M}$ $(\forall \theta \in (0, 1))$，故 $\mathscr{M}$ 是有界开连络集的闭包.

当 $w \in \mathscr{M}$ 时，由线性抛物型方程解的内估计与近边估计(其中近边估计的成立，用到 $b)$ 中二个相容性条件)得:

$$v = \Phi(w, \tau) \in C^{2+\beta\delta, 1+\frac{\beta\delta}{2}}(\bar{Q}),$$

这是因为 $\dfrac{\partial a_i(x, t, w, w_{x_k})}{\partial w_{x_j}}$ 与 $A(x, t, w, w_{x_k})$ 二者 $\in C^{\beta\delta, \beta\delta/2}(\bar{Q})$. 由于 $|w|_{H_\delta} \leqslant M_2 + \varepsilon$，导出 $|v_t, v_{x_i}, v_{x_i x_j}|_{\beta\delta, \bar{Q}} \leqslant C(M_2 + \varepsilon)$.

v_{x_i} 对 x 满足指数为 1 的 Hölder 条件，v 对 t 满足指数为 1 的 Hölder 条件. 由引理 2 得到 v_{x_i} 对 t 满足指数为 1/2 的 Hölder 条件. 因此 v, $v_{x_i} \in C^{1, 1/2}$，嵌入 $H_\delta (\delta < 1)$ 为紧集.

当 $w^1, w^2 \in H_\delta$ 时，$v^1 = \Phi(w^1, \tau)$, $v^2 = \Phi(w^2, \tau)$, $v = v^2 - v^1$ 满足

$$v_t - \sum \left[\tau \frac{\partial a_i(x, t, w^1, w^1_{x_k})}{\partial w_{x_j}} + (1-\tau)\delta_{ij}\right] v_{x_i x_j}$$

$$= \tau \sum \left[\frac{\partial a_i(x, t, w^2, w^2_{x_k})}{\partial w_{x_j}} - \frac{\partial a_i(x, t, w^1, w^1_{x_k})}{\partial w_{x_j}}\right] v^2_{x_i x_j}$$

$$- \tau[A(w^2) - A(w^1)],$$

$$v|_S = 0,$$

$$v|_{t=0} = 0.$$

方程右端视为自由项. $\forall \tau \in [0, 1]$，当 $|w^2 - w^1|_{H_\delta}$ 小时，方程右端在 $C^{\beta\delta/2, \beta\delta/4}(\bar{Q})$ 下小(它在 $C^{\beta\delta, \beta\delta/2}(\bar{Q})$ 下仅为有界，是不够的). 应用线性方程解的估计得: $|v_t, v_{x_i}, v_{x_i x_j}|_{\beta\delta/2, \bar{Q}}$ 小，因此 $|v|_{H_\delta}$ 小，

同法可证 $\Phi(w,\tau)$，$w\in\mathscr{M}$ 时对 $\tau\in[0,1]$ 为一致连续。

当 $\tau=0$ 时，

$$\begin{cases}v_t-\Delta v=0,\\ v|_S=v|_{t=0}=0\end{cases}$$

仅有零解，即 $w=\Phi(w,0)$ 的不动点只有 $w=0$，即解的指数为 1 或 -1，不为 0。

对不动点集合 $w\in\mathscr{M}\subset H_\delta$，由线性方程解的估计得：$w\in C^{2+\beta\delta,1+\beta\delta/2}(\bar{Q})$，因此 $|u^\tau|\leqslant M$，$|\nabla u^\tau|\leqslant M_1$，$|u^\tau|_{H_\delta}\leqslant M_2$，即 $\partial\mathscr{M}$ 上没有不动点。

由 Leray-Schauder 不动点定理，证得解为存在：

$$u\in C^{2+\beta\delta,1+\beta\delta/2}(\bar{Q}).$$

再证解的光滑性可提高到 $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q})$。这是由于 $u\in C^{2+\beta\delta,1+\beta\delta/2}(\bar{Q})\Rightarrow u_{x_i}\in C^{1,1/2}(\bar{Q})\Rightarrow\dfrac{\partial a_i(x,t,u,u_{x_k})}{\partial u_{x_j}}$，$A(x,t,u,u_{x_k})\in C^{\beta,\beta/2}(\bar{Q})$。再应用线性方程解的性质得到：

$$u\in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\bar{Q}).$$

$C^{2,1}(\bar{Q})$ 中解为唯一。这是因为解满足积分关系式

$$\int_0^t\int_\Omega[u_t\eta+\sum a_i(x,t,u,u_{x_k})\eta_{x_i}+a(x,t,u,u_{x_k})\eta]dx\,dt=0,$$
$$\forall\eta\in C^{1,0}(\bar{Q}),\quad \eta|_S=0.$$

如有二解 u^1，u^2 满足上式，二式相减并记 $v=u^2-u^1$，则由于

$$\begin{aligned}\delta a_i&=a_i(x,t,u^2,u^2_{x_k})-a_i(x,t,u^1,u^1_{x_k})\\&=\sum v_{x_j}\int_0^1[\partial a_i(x,t,\tau u^1+(1-\tau)u^2,\tau u^1_{x_k}\\&\quad+(1-\tau)u^2_{x_k})/\partial u_{x_j}]d\tau\\&\quad+v\int_0^1\frac{\partial a_i(\quad)}{\partial u}d\tau=\sum\hat{a}_{ij}v_{x_j}+\hat{b}_iv.\end{aligned}$$

同法得到：

$$\delta a=\sum\hat{c}_iv_{x_i}+\hat{c}v.$$

取 $\eta=v$ 得：

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} v^2(x,t)dx + \int_0^t\int_{\Omega}[\sum \hat{a}_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + \sum(\hat{b}_i + \hat{c}_i)vv_{x_i}$$

$$+ \hat{c}v^2]dx\,dt = 0$$

或

$$\int_{\Omega} v^2 dx + \nu\int_0^t\int_{\Omega}|\nabla v|^2 dx\,dt \leqslant \gamma\int_0^t\int_{\Omega} v^2 dx\,dt,$$

γ 是常数. 再由 $v|_{t=0} = 0$, 则由上式得到 $v = 0$.

最后证 $u_{x_k t} \in L^2(Q)$.

记 $v_h = \frac{1}{h}[u(x, t+h) - u(x, t)]$. $\mathscr{L}u = 0$ 取差分, 乘 v_h 于 Ω 积分得:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} v_h^2(x,t)dx + \int_{\Omega}[\sum(\tilde{a}_{ij}v_{hx_j} + \tilde{b}_i v_h + \tilde{d}_i)v_{hx_i}$$

$$+ (\tilde{c}_i v_{hx_i} + \tilde{c}v_h + \tilde{d})v_h]dx = 0.$$

当 $0 < h < h_0$ 时, $\tilde{a}_{ij}, \cdots$ 为有界. 因此

$$\int_{\Omega} v_h^2(x,t)dx + C\int_0^t\int_{\Omega}|\nabla v_h|^2 dx\,dt \leqslant C_1\int_0^t\int_{\Omega} v_h^2 dx\,dt,$$

即 $\int_0^t\int_{\Omega}|\nabla v_h|^2 dx\,dt$ 对 h 为一致有界. $h \to 0$ 得:

$$\int_0^t\int_{\Omega}\sum u_{x_k t}^2 dx\,dt < \infty.$$

定理证毕.

几点注解:

1. 定理 4 的条件可适当减弱, 结论也稍弱一些. 证明解的存在性时, 条件 f) 可以不要. 边界与初值光滑性可减弱为 $\partial\Omega \in C^2$, $\max_{\Omega}|\nabla\varphi| <$ const. 结论为 $u \in C^{2,1}(Q) \cap C^{2+\beta,1+\beta/2}(\Omega' \times [\delta, T])$. 解存在性的证明是, 用系数, 初值与 $\partial\Omega$ 光滑化后的解 $\in C^{2+\beta,1+\beta/2}$ 来进行逼近即可. 证解的唯一性时, a 对 u 与 $p_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 可微的条件是必要的.

2. 还可研究 $a_i(x, t, u, p_k)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $a(x, t, u, p_k)$ 增

长阶情况不同一些时解的存在、唯一性，以及方程不是具散度结构头部时解的存在、唯一性，参见后面第九、第十章.

3. 平行的方法可用于证明拟线性椭圆型方程第一边值问题的下列结果：

$$\begin{cases} \mathscr{L}u \equiv \sum_{i=1}^{n} \dfrac{da_i(x, u, p_k)}{dx_i} + a(x, u, p_k) = 0, \quad (p_k = u_{x_k}), \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

满足条件

$$a(x, u, 0) + \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x, u, 0) \leqslant -b_1u^2 + b_2,$$

$$(b_1 \geqslant 0,\ b_2 \geqslant 0),$$

$$\sum \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(x, u, 0)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

$$\nu(|u|)(1 + |p|^{m-2})|\xi|^2 \leqslant \sum \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(x, u, p)\xi_i\xi_j$$

$$\leqslant \mu(|u|)(1 + |p|^{m-2})|\xi|^2,$$

$$m \geqslant 2, \ \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n$$

$$|a(x, u, p)| + \sum\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right| + \sum\left(|a_i| + \left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|\right)(1 + |p|)$$

$$\leqslant \mu(|u|)(1 + |p|^m),$$

$x \in \bar{\Omega}$, $|u|$, $|Du|$有界时，a_i, a, $\dfrac{\partial a_i}{\partial p_j}$, $\dfrac{\partial a_i}{\partial u}$, $\dfrac{\partial a_i}{\partial x_j} \in C^\alpha$, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\varphi \in C^{2+\alpha}$，则上述第一边值问题解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ 为存在、唯一，且 $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

证明方法[5]是应用 Leray-Schauder 度定理于

$$\begin{cases} \tau\mathscr{L}u + (1-\tau)(1 + |p|^2)^{(m-2)/2}\Delta u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = \tau\varphi. \end{cases}$$

4. 对椭圆型方程边值问题，[5] 仅讨论最大，最小特征值之比不超过常数(称一致椭圆). [6] 中推广到讨论最大，最小特征值之比不是常数的情况（称非一致椭圆). 例如极小曲面方程为 $\int (1 + |p|^2)^{1/2}dx = \min$ 的 Euler 方程

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p_i}{\sqrt{1+|p|^2}}\right)=0,$$

或

$$\Delta u-\sum \frac{p_i p_j}{1+|p|^2}u_{x_i x_j}=0.$$

特征值为 1, 1, ⋯, 1, $\frac{1}{1+|p|^2}$, [6] 中讨论这方程边值问题解的存在唯一性等.

5. 拟线性抛物型方程在系数蜕化情况时的第一边值问题等,在第五章中还要进行讨论.

6. 存在问题. 本章条件 (5)、(6) 换为

$$\sum_{i,j}\frac{\partial a_i(x,t,u,p_k)}{\partial p_j}\xi_i\xi_j \geqslant \nu(|u|)(1+|p|^{m-2})|\xi|^2,$$
$$\forall \xi\in \boldsymbol{R}^n,$$

$$\sum_i\left(|a_i|+\left|\frac{\partial a_i}{\partial u}\right|\right)(|p|+1)+\sum_{i,j}\left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}\right|(|p|^2+1)$$
$$+|a|+\sum_{i,j}\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right|\leqslant \mu(|u|)(|p|^m+1),\ (m>2),$$

如何推广本章的方法去证明第一边值问题解为存在、唯一?

第二章　非线性电报方程的周期边值问题[7]

设 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$，$\Omega$ 为有界区域．$a_{jk}(x)\ (1 \leqslant j, k \leqslant n)$ 为 Ω 中的有界函数，且设 $a_{jk}(x) = a_{kj}(x)\ (1 \leqslant j, k \leqslant n)$．设有 $K > 0$ 使 $\sum a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant K|\xi|^2$，$\forall \xi \in \boldsymbol{R}^n$，$x \in \Omega$．考察定解问题：

$$\begin{cases} \mathscr{L} u = u_{tt} - \sum\limits_{j,k=1}^{n} (a_{jk}(x)u_{x_k})_{x_j} - Cu + g(x, t, u)u_t \\ \qquad\qquad + f(x, t, u) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, 2\pi], \\ u|_{\partial\Omega \times [0, 2\pi]} = 0, \\ u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

其中 f，g 关于 t 是以 2π 为周期的周期函数，C 为常数．

双曲型方程边值问题，在所有的边界上任意给值，是不稳定的问题，这是方程的基本知识之一．但如在 t 方向限定为周期函数，x 方向给值，称周期边值问题，是弦振动、膜振动周期解的一般化，在一定条件下成为稳定问题．这一可能性是我们研究的基础．

非线性双曲型方程周期边值问题较多研究两个自变量的情况[1]：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + f(x, t, u) = 0, \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \end{cases}$$

其中 f 是近似线性的，超线性的等等．此问题能解的基本原因是：自共轭算子 $\mathscr{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的逆算子 $\mathscr{L}^{-1}$ 在函数空间 $L^2[(-\pi, \pi) \times [0, 2\pi]]/\mathscr{M}$ 上为紧，其中 $\mathscr{M}$ 为算子 $\mathscr{L}$ 的零空间．这是因为算子 $\mathscr{L}$ 在 $L^2[(-\pi, \pi) \times [0, 2\pi]]/\mathscr{M}$ 上的特征值为 $m^2 - l^2$，特征函数为 $e^{i(mx+lt)}(m^2 \neq l^2;\ m, l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$．由于

特征值的极限点只有 ∞ 点，因而 $\mathscr{L}^{-1}$ 特征值的极限点只有 0 点。

函数 $u(x, t)$ 作特征展开：$u(x, t)=\sum a_i w_i(x, t)$，$w_i$ 为特征函数，

$$\mathscr{L}^{-1}u=\sum_{i\leqslant J} a_i\lambda_i w_i(x, t)+\sum_{i>J} a_i\lambda_i w_i(x, t)$$
$$=\mathscr{L}_1^{-1}u+\mathscr{L}_2^{-1}u,$$

$\mathscr{L}_1^{-1}$ 是有限算子为紧，

$$\|\mathscr{L}_2^{-1}\|=\sup\frac{\|\mathscr{L}_2^{-1}u\|}{\|u\|}=\sup\left(\frac{\sum_{i>J}|a_i\lambda_i|^2}{\sum|a_i|^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \max_{i>J}|\lambda_i|\to 0,\quad 当 J\to\infty,$$

故 $\mathscr{L}^{-1}$ 为紧.

§1 多维电报方程非共振情况下解存在性的证明

多个自变量的非线性双曲型方程周期边值问题研究得很少，原因是多变量自共轭算子 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ 的逆算子非紧. 以 $\mathscr{L}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\left(\Delta=\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)$ $\Omega=\{(x_1,\cdots,x_n)|-\pi<x_j\leqslant\pi, j=1,2,\cdots,n\}$ 为例，$\mathscr{L}$ 的非零特征值为 $\sum_{i=1}^n m_i^2-l^2\left(l^2\neq\sum_{j=1}^n m_j^2\right)$，特征值可以有有限的极限点，例如 $l^2=m_1^2(l=m_1=1, 2,\cdots)$，$m_2=1$，$m_3=\cdots=m_n=0$，特征值的极限点为 1，因此 $\mathscr{L}^{-1}$ 非紧，$\mathscr{L}^{-1}$ 非紧使非线性定解问题用线性问题逼近时，解列的选子列收敛性成为问题，因此解非线性高维双曲型周期问题由于求解工具缺乏，而难于得出成果.

多个自变量非线性双曲型方程周期边值问题当 $g\neq 0$ 时 ($g\neq 0$ 可看为电报方程的摩擦项) 情况变好，例如 $g=$ 常数 $\neq 0$，

则 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sum\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)+g\frac{\partial}{\partial t}$ 逆算子为紧. 以 $\mathscr{L}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-$ $-\Delta+g\frac{\partial}{\partial t}$ 为例,非零特征值为 $\sum_{j=1}^{n}m_j^2-l^2+igl\,(i=\sqrt{-1})$, 非零特征值仅能以 ∞ 为极限点.

g 为常数 $\neq 0$ 时, 电报方程周期边值问题解存在的研究见 [8]. 今推广到 g 为函数(但不为零)的情况. 具体假定为:

设 $|f(x,t,z)|\leqslant\gamma|z|+b_\gamma(x,t)$, 常数 γ 适当小, $b_\gamma\in L^2(\Omega\times[0,2\pi])$, 例如 $f=|z|^{1/2}\leqslant\gamma|z|+\frac{1}{4\gamma}$. 设 $g(x,t,z)$ 为变量 $(x,t,z)\in\Omega\times[0,2\pi]\times\boldsymbol{R}$ 中的连续周期函数 (对 t 周期为 2π). 又设 $0<\sigma_0\leqslant|g(x,t,z)|\leqslant\sigma_1<\infty$. 设算子 $L=-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ 的特征值为 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$, 标准化特征函数为 $w_1(x),w_2(x),\cdots$, 即 $Lw_j=\lambda_jw_j$ (特征值可以有重复, 又 $\lambda_1>0$, 是因为 L 不能有负的特征值).

定理 1 在上述条件下,定解问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=0,\\ u|_{\partial\Omega\times[0,2\pi]}=0,\\ u(x,t+2\pi)=u(x,t),\end{cases}$$

当 $C\neq\lambda_j\ (j=1,2,\cdots)$ 时, 至少有一广义解 $u\in\mathring{H}_1(\Omega\times[0,2\pi])$.

证 $\forall U(x,t)\in L^2(\Omega\times[0,2\pi])$, 求解

$$\tilde{\mathscr{L}}u=u_{tt}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{jk}(x)u_{x_k})-Cu+g(x,t,U)u_t+f(x,t,U)=0,$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,2\pi]}=0,$$

$$u(x,t+2\pi)=u(x,t).$$

先做适当的先验估计而证明解的存在性.

方程乘 u_t 于 $\Omega\times[0,2\pi]$ 积分得

$$\sigma_0\|u_t\|^2 \leqslant \int_{\Omega\times[0,2\pi]} g(x, t, u)u_t^2 dxdt$$

$$= \int_{\Omega\times[0,2\pi]} -f(x, t, U)u_t dxdt \leqslant \|f(x, t, U)\|\|u_t\|,$$

因此有:

$$\|u_t\| \leqslant \frac{1}{\sigma_0}\|f(x, t, U)\|.$$

$u(x, t)$ 作特征函数展开成为:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{j,k}w_j(x)e^{ikt}, \quad (\alpha_{j,-k} = \bar{\alpha}_{j,k}),$$

记

$$u_0(x, t) = \sum_{k\neq 0} \alpha_{j,k}w_j(x)e^{ikt},$$

$$u_1(x) = \sum_{\lambda_j>C} \alpha_{j,0}w_j(x),$$

$$u_2(x) = \sum_{\lambda_j<C} \alpha_{j,0}w_j(x),$$

由假设 $C \neq \lambda_1, \lambda_2, \cdots$, 因此 $u = u_0 + u_1 + u_2$.

我们有:

$$\|u_0\| \leqslant \left(\sum_{k\neq 0}|\alpha_{j,k}|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k\neq 0}k^2|\alpha_{j,k}|^2\right)^{1/2} = \|u_{0t}\| = \|u_t\|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sigma_0}\|f(x, t, U)\|.$$

记 $K_1 = \min\limits_{\lambda_j>C}(\lambda_j - C)$, $K_2 = \min\limits_{\lambda_j<C}(C - \lambda_j)$. $\mathscr{L}u = 0$ 乘 u_1 积分得:

$$K_1\|u_1\|^2 \leqslant \int_{\Omega\times[0,2\pi]} \sum(\lambda_j - C)u_1^2 dxdt$$

$$= \int_{\Omega\times[0,2\pi]} \left(\sum a_{jk}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} - Cu_1^2\right)dxdt$$

$$= \int_{\Omega\times[0,2\pi]} -(gu_t + f)u_1 dxdt$$

$$\leqslant \sigma_1\|u_1\|\|u_t\| + \|f(x, t, U)\|\|u_1\|,$$

因此有:

$$\|u_1\| \leqslant \frac{1}{K_1}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}+1\right)\|f(x, t, U)\|,$$

同法得:

$$\|u_2\| \leqslant \frac{1}{K_2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}+1\right)\|f(x, t, U)\|.$$

$$\|u\|^2 = \|u_0\|^2 + \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \leqslant K_3^2\|f(x, t, U)\|^2, \qquad (1)$$

其中

$$K_3^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} + \left(\frac{1}{K_1^2}+\frac{1}{K_2^2}\right)\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}+1\right)^2.$$

$\tilde{\mathscr{L}} u = 0$ 乘 u 积分得:

$$\int_{\Omega\times[0,2\pi]} \sum a_{jk}(x) u_{x_j} u_{x_k} dxdt - \|u_t\|^2$$

$$= \int_{\Omega\times[0,2\pi]} (Cu - gu_t - f) u dxdt,$$

由此

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{H}_1(\Omega\times[0,2\pi])} \leqslant K_4\left[\|u_t\|^2 + \int_{\Omega\times[0,2\pi]} \sum a_{jk}(x) u_{x_j} u_{x_k} dxdt\right]$$

$$\leqslant K_5^2\|f(x, t, U)\|^2 \qquad (2)$$

当 g 为常数, $g = \sigma(\sigma = \pm\sigma_0, \sigma_0 > 0)$ 时,

$$\begin{cases} \tilde{\mathscr{L}} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega\times[0,2\pi]} = 0, \\ u(x, t+2\pi) = u(x, t) \end{cases}$$

解为存在. 这是因为

$$|f| \leqslant \gamma|U| + b_\gamma(x, t) \in L^2(\Omega\times[0, 2\pi]),$$

f 展开为:

$$f = \sum f_{j,k} w_j(x) e^{ikt}, \quad \sum_{j,k} |f_{j,k}|^2 < \infty,$$

设 $u = \sum \alpha_{j,k} w_j(x) e^{ikt}$, 代入 $\tilde{\mathscr{L}} u = 0$ 比较系数得:

$$\alpha_{j,k} = \frac{-f_{j,k}}{-k^2 + j^2 + k\sigma i}, \quad |\alpha_{j,k}| \leqslant \frac{|f_{j,k}|}{\min(k_1, k_2, k\sigma)}.$$

故有:

$$\sum |\alpha_{j,k}|^2 < \infty, \quad u \in L^2(\Omega\times[0, 2\pi]),$$

应用(2)式得 $u\in \overset{\circ}{H}_1(\Omega\times[0, 2\pi])$，故广义解存在.

当 g 不是常数时，用参数延拓法来证明解为存在. 作

$$\begin{cases}\tilde{\mathscr{L}}_{\theta}u = u_{tt} - \sum \dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_{jk}(x)u_{x_k}) - Cu + [(1-\theta)\sigma \\ \qquad\qquad + \theta g]u_t = -f, \quad (0\leqslant\theta\leqslant 1), \\ u|_{\partial\Omega\times[0,2\pi]} = 0, \\ u(x, t+2\pi) = u(x, t).\end{cases}$$

当上式可解时，由(2)得 $\|\tilde{\mathscr{L}}_{\theta}^{-1}\|\leqslant K_5$，而 $\tilde{\mathscr{L}}_{\theta}+\Delta\theta u = f$ 化为

$$\left(I + \Delta\theta\tilde{\mathscr{L}}_{\theta}^{-1}(g-\sigma)\frac{\partial}{\partial t}\right)u = -\tilde{\mathscr{L}}_{\theta}^{-1}f, \ (u\in\overset{\circ}{H}_1).$$

如能做到

$$|\Delta\theta|\left\|\tilde{\mathscr{L}}_{\theta}^{-1}(g-\sigma)\frac{\partial}{\partial t}\right\| < 1,$$

则可延拓 $\Delta\theta$ 的长度. 由于

$$\left\|\tilde{\mathscr{L}}_{\theta}^{-1}(g-\sigma)\frac{\partial}{\partial t}\right\| = \sup\frac{\left\|\tilde{\mathscr{L}}_{\theta}^{-1}(g-\sigma)\dfrac{\partial}{\partial t}u\right\|_{\overset{\circ}{H}_1}}{\|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}}$$

$$\leqslant K_5\sup\frac{\|(g-\sigma)u_t\|_{L^2}}{\|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}} \leqslant K_5\sigma_1\sup\frac{\|u_t\|_{L^2}}{\|u\|_{\overset{\circ}{H}_1}} \leqslant K_5\sigma_1,$$

故延拓在 $|\Delta\theta| < \dfrac{1}{K_5\sigma_1}$ 时为有效. 最终得到 $\theta = 1$ 可解.

由(1)式与对 f 的假设得到

$$\begin{cases}\tilde{\mathscr{L}}u = 0, \\ u|_{\partial\Omega\times[0,2\pi]} = 0, \\ u(x, t+2\pi) = u(x, t)\end{cases}$$

解的估计式

$$\|u\|_{L^2}\leqslant K_3[\gamma\|U\|_{L^2} + \|b_\gamma(x, t)\|_{L^2}].$$

当 γ 较小使 $K_3\gamma < 1$，则当 $\|U\|_{L^2}\leqslant \dfrac{K_3}{1-K_3\gamma}\|b_\gamma\|_{L^2}$ 时有：

$$\|u\|_{L^2}\leqslant\frac{K_3}{1-K_3\gamma}\|b_\gamma\|_{L^2},$$

故映象 $U \to u$ 于 $L^2(\Omega \times [0, 2\pi])$ 为有界，又由 (2) 式得：

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}_1} \leqslant \frac{K_5}{1 - K_3\gamma} \|b_\gamma\|_{L^2},$$

故映象 $U \to u$ 于 $L^2(\Omega \times [0, 2\pi])$ 为紧，由 Schauder 不动点定理知映象 $U \to u$ 于球 $\|u\|_{L^2} \leqslant \dfrac{K_3}{1 - K_3\gamma} \|b_\gamma\|_{L^2}$ 内至少有一不动点，且不动点函数 $u \in \overset{\circ}{H}_1(\Omega \times [0, 2\pi])$. 定理得证.

§2 共振情况的讨论

再考察 $C = \lambda_j\ (j \geqslant 1)$，此称为共振情况. 线性情况遇特征值时，方程右端项要满足某种正交条件才可有解，非线性情况遇共振时，类似于正交条件的是方程非齐次项要满足某些不等式才可有解，此称为 Landesman-Lazor 型条件[9].

设 $f(x, t, z) = f^{(1)}(x, t, z) + f^{(2)}(x, t)$, $f^{(2)} \in L^2(\Omega \times [0, 2\pi])$, $|f^{(1)}(x, t, z)| \leqslant \gamma|z| + b_\gamma(x, t)$, $\forall \gamma > 0$, $b_\gamma \in L^2(\Omega \times [0, 2\pi])$.

例如 $f^{(1)} = |z|^{1/2} \leqslant \gamma|z| + \dfrac{1}{4\gamma}$ 就满足上面的条件. 再设

$$f^{(1)}(x, t, z) \operatorname{sign} z \geqslant -h(x, t), \quad h \in L^2(\Omega \times [0, 2\pi]).$$

记

$$f_+^{(1)}(x, t) = \lim_{z \to +\infty} \inf f^{(1)}(x, t, z),$$

$$f_-^{(1)}(x, t) = \lim_{z \to -\infty} \sup f^{(1)}(x, t, z).$$

$w(x) = \sum\limits_{\lambda_j = C} \alpha_{j,0} w_j(x)$ 为任一特征值为 C 的特征函数.

Landesman-Lazor 型条件为:

$$\int_{w>0} f_+^{(1)} w\,dx\,dt + \int_{w<0} f_-^{(1)} w\,dx\,dt > C_0 \|w\|_{L^2(\Omega \times [0, 2\pi])}, \qquad (3)$$

这条件中 C_0 为适当的常数.

定理 2 在上述条件下，当 (3) 式成立及 $g = g(x, u)$ 时，共振情况至少有一个广义解存在.

证 共振情况下的广义解，用非共振情况做逼近。

$$\begin{cases}\mathscr{L}u+\varepsilon u=0,\\ u|_{\partial\Omega\times[0,2\pi)}=0,\\ u(x,t+2\pi)=u(x,t),\end{cases}$$

当 $\varepsilon\neq 0$ 时是非共振情况，总是有解 u_ε。$\varepsilon\to 0$ 时，$\|u_\varepsilon\|_{L^2}$，$\|u\|_{\mathring{H}_1}$ 是否有与 ε 无关的界？ε 由双边趋于零是不可能的，这由 Fredholm 二择一定理即知. 今研究单边趋近的情况. 看 $\varepsilon\to+0$.

解 $u_\varepsilon=\sum\alpha^\varepsilon_{j,k}w_j(x)e^{ikt}$，$\alpha^\varepsilon_{j,k}$ 简记为 $\alpha_{j,k}$，u_ε 简记为 u。令

$$w=\sum_{\lambda_j=C}\alpha_{j,0}w_j(x),$$

则由 (1) 式得：

$$\|u-w\|^2=\|u_0\|^2+\|u_1\|^2+\|u_2\|^2\leqslant K_3^2\|f(x,t,u)\|^2,$$

因此

$$\begin{aligned}\|u-w\|&\leqslant K_3[\gamma\|u\|+\|b_\gamma\|+\|f^{(2)}\|]\\&\leqslant K_3\gamma(\|u-w\|+\|w\|)+K_4,\end{aligned}$$

导出

$$\|u-w\|\leqslant K_5\gamma\|w\|+K_6,\quad \|u\|\leqslant(1+K_5\gamma)\|w\|+K_6,$$

$$\|f^{(1)}(x,t,u)\|\leqslant\gamma\|u\|+\|b_\gamma\|\leqslant K_7\gamma\|w\|+K_8,$$

我们有正交条件：

$$\begin{aligned}0=\int_{\Omega\times[0,2\pi]}(\mathscr{L}u+\varepsilon u)w\,dx\,dt&=\varepsilon\|w\|^2\\&+\int_{\Omega\times[0,2\pi]}f(x,t,u)w\,dx\,dt,\end{aligned}$$

上面式子的成立，是由于

$$\int_{\Omega\times[0,2\pi]}(u-w)w\,dx\,dt=0,\quad\int_{\Omega\times[0,2\pi]}u_{tt}w\,dx\,dt=0,$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times[0,2\pi]}g(x,u)u_tw\,dx\,dt&=\int_\Omega G(x,u)w\Big|_0^{2\pi}dx\\&-\int_{\Omega\times[0,2\pi]}G(x,u)w_t\,dx\,dt=0,\end{aligned}$$

其中 $G(x,u)=\int g(x,u)du$，

$$\int_{\Omega\times[0,2\pi]}[\sum(a_{jk}(x)u_{x_k})_{x_j}+Cu]wdxdt$$
$$=\int_{\Omega\times[0,2\pi]}[\sum(a_{jk}w_{x_k})_{x_j}+Cw]udxdt$$
$$=\int_{\Omega\times[0,2\pi]}(-\lambda_j w+Cw)udxdt=0.$$

正交条件中还含有 u，用如下方法化为仅含有 w 的条件:

$$0=\varepsilon\|w\|^2+\int_{\Omega\times[0,2\pi]}f(x,t,u)wdxdt$$
$$\geqslant\int_{\Omega\times[0,2\pi]}f^{(1)}(x,t,u)udxdt$$
$$-\int_{\Omega\times[0,2\pi]}f^{(1)}(x,t,u)(u-w)dxdt$$
$$+\int_{\Omega\times[0,2\pi]}f^{(2)}wdxdt$$
$$\geqslant\int_{\Omega\times[0,2\pi]}\operatorname{sign}uf^{(1)}(x,t,u)|u|dxdt-K_3\|f^{(1)}(x,t,u)\|^2$$
$$-K_3\|f^{(1)}\|\|f^{(2)}\|-\|f^{(2)}\|\|w\|$$
$$=\int_{\Omega\times[0,2\pi]}[\operatorname{sign}uf^{(1)}(x,t,u)+h(x,t)][|u|$$
$$-K_3\operatorname{sign}uf^{(1)}(x,t,u)]dxdt$$
$$-(\|h\|+\|f^{(2)}\|)(\|u\|+K_3\|f^{(1)}\|)-\|f^{(2)}\|\|w\|$$
$$\geqslant\int_{\Omega\times[0,2\pi]}[\operatorname{sign}uf^{(1)}(x,t,u)+h(x,t)][(1-K_3\gamma)|u|$$
$$-K_3b_\gamma]dxdt-(\|h\|+\|f^{(2)}\|)(\|u\|+K_3\|f^{(1)}\|)$$
$$-\|f^{(2)}\|\|w\|\geqslant(1-K_3\gamma)\int_{\Omega\times[0,2\pi]}f^{(1)}(x,t,u)udxdt$$
$$-K_9\|w\|-K_{10},$$

当取 γ 使 $1-K_3\gamma>0$ 时，由上式得:

$$0\geqslant\int_{\Omega\times[0,2\pi]}f^{(1)}(x,t,u)udxdt-K_{11}\|w\|-K_{12}$$
$$\geqslant\int_{\{(x,t)\in\Omega\times[0,2\pi]|u(x,t)>0\}}f_+^{(1)}(x,t)udxdt$$
$$+\int_{\{(x,t)\in\Omega\times[0,2\pi]|u(x,t)<0\}}f_-^{(1)}(x,t)udxdt-K_{11}\|w\|-K_{12}$$

由于

$$\left|\int_{u>0} f_+^{(1)}(u-w)dxdt\right| \leqslant \|f_+^{(1)}\|\|u-w\|$$

$$\leqslant \|f_+^{(1)}\|(K_5\gamma\|w\| + K_6),$$

$$\int_{u>0} f_+^{(1)} w dxdt - \int_{w>0} f_+^{(1)} w dxdt = \int_{\substack{u>0\\ w\leqslant 0}} - \int_{\substack{w>0\\ u\leqslant 0}},$$

当 $u>0$, $w\leqslant 0$ 时，$|w|\leqslant u-w$, 因此

$$\left|\int_{\substack{u>0\\ w\leqslant 0}} f_+^{(1)} w dxdt\right| \leqslant \|f_+^{(1)}\|(K_5\gamma\|w\| + K_6),$$

另一些项同法估计，最后得：

$$0 \geqslant \int_{\{(x,t)\in\Omega\times[0,2\pi]|w(x,t)>0\}} f_+^{(1)} w dxdt$$

$$+ \int_{\{(x,t)\in\Omega\times[0,2\pi]|w(x,t)<0\}} f_-^{(1)} w dxdt$$

$$- [K_{11} + 3K_5\gamma(\|f_+^{(1)}\| + \|f_-^{(1)}\|)]\|w\| - K_{13}.$$

今假设 Landesman-Lazor 型条件

$$\int_{w>0} f_+^{(1)} z dxdt + \int_{w<0} f_-^{(1)} z dxdt \geqslant (K_{11}+1)\|z\|$$

对任何 $z(x) = \sum_{\lambda_j=C} \beta_j w_j(x)$ 成立. 特别取 $\beta_j = \alpha_{j,0}^{\varepsilon}$, 则 $z(x) = w_\varepsilon(x,t)$,

$$0 \geqslant [1 - 3K_5\gamma(\|f_+^{(1)}\| + \|f_-^{(1)}\|)]\|w_\varepsilon\| - K_{13},$$

取 $\gamma = [4K_5(\|f_+^{(1)}\| + \|f_-^{(1)}\|)]^{-1}$ 得 $\|w_\varepsilon\| \leqslant 4K_{13}$,

$$\|u_\varepsilon\| \leqslant (1+K_5\gamma)\|w_\varepsilon\| + \|K_6\| \leqslant K_{14},$$

$$\|f(x,t,u_\varepsilon)\| \leqslant \gamma\|u_\varepsilon\| + \|b_\gamma\| + \|f^{(2)}\| \leqslant K_{15},$$

由 (2) 式得:

$$\|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|_{\overset{\circ}{H}_1} \leqslant K_5\|f(x,t,u_\varepsilon)\| \leqslant K_5K_{15}.$$

$$\|u_\varepsilon\|^2_{\overset{\circ}{H}_1} \leqslant \|u_\varepsilon - w_\varepsilon\|^2_{\overset{\circ}{H}_1} + \|w\|^2_{\overset{\circ}{H}_1} \leqslant K_{16},$$

上面最后等式的成立，是因为

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant 4K_{13} \Rightarrow \|w_\varepsilon\|_{\overset{\circ}{H}_1} \leqslant K_{17},$$

故有适当的 $\varepsilon_0>0$ 使 $\{u_\varepsilon\}$ 于 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 为紧，即至少有一极限

函数 $u \in \mathring{H}_1$ 为共振（$C = \lambda_j$）时定解问题的弱解.

另一单边逼近时 $\varepsilon \to -0$, 条件稍加改变为:

$$f^{(1)}(x, t, z) \operatorname{sign} z \leqslant h(x, t),$$

$$\int_{w>0} f_+^{(1)} w dx dt + \int_{w<0} f_-^{(1)} w dx dt \leqslant C_0 \|w\|_{L^2}.$$

§3 解光滑性的一些讨论

对弱解的光滑性,稍作讨论如下:

定理 3 当 $n = 1$ 时, 如果 $f(x, t, u), g(x, t, u) \in C^\infty([0, \pi] \times [0, 2\pi] \times R)$, 则定理 1, 2 中的解 $u \in C^\infty([0, \pi] \times [0, 2\pi] \times R)$.

证 记 $\sigma_0 \operatorname{sign} g = \sigma$, 方程化为:

$$\mathscr{L}_0 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1 + \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right) u = F$$

$$= (C+1)u - [g(x, t, u) - \sigma] u_t - f(x, t, u).$$

由于 $u \in \mathring{H}_1$, 故 $F \in L^2$. 对 F, u 作特征函数展开得:

$$F = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{jk} \sin jx e^{ikt}, \quad \sum |b_{jk}|^2 < \infty,$$

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{jk} \sin jx e^{ikt},$$

比较系数得:

$$a_{jk} = \frac{b_{jk}}{j^2 - k^2 + 1 + i\sigma k},$$

因此

$$\int_0^\pi (u_t^2 + u_x^2 + u^2) dx$$

$$\leqslant K_1 \sum_{j, k_1, k_2} \frac{(1 + j^2 + |k_1 k_2|) |b_{jk_1}| |b_{jk_2}|}{|j^2 - k_1^2 + 1 + i\sigma k_1| |j^2 - k_2^2 + 1 + i\sigma k_2|}$$

$$\leqslant K_{19}\sum_{j,k_2}\sum_{k_1}\frac{(1+j^2+k_1^2)|b_{jk_2}|^2}{(j^2+k_1^2+1)^2+\sigma^2k_1^2}$$

$$\leqslant K_{20}\sum_{j,k_2}|b_{jk_2}|^2=K_{21},\quad \forall t\in[0,2\pi].$$

同法

$$\int_0^{2\pi}(u_t^2+u_x^2+u^2)dt\leqslant K_{22},\quad \forall x\in[0,\pi].$$

$$|u(x_2,t)-u(x_1,t)|=\left|\int_{x_1}^{x_2}u_x(\sigma,t)d\sigma\right|$$

$$\leqslant|x_2-x_1|^{1/2}\left|\int_{x_1}^{x_2}u_x^2(\sigma,t)d\sigma\right|\leqslant K|x_2-x_1|^{1/2},$$

同法

$$|u(x,t_2)-u(x,t_1)|\leqslant K|t_2-t_1|^{1/2}.$$

$$|u(x_2,t_2)-u(x_1,t_1)|\leqslant K(|x_2-x_1|^{1/2}+|t_2-t_1|^{1/2})$$

$$\leqslant 2K[(x_2-x_1)^2+(t_2-t_1)^2]^{1/4}.$$

即

$$u\in C^{1/2},\quad \|u\|_{1/2}\equiv\|u\|_{C^{1/2}}\leqslant 2K.$$

再估计二阶微商. 由方程

$$u_{tt}-u_{xx}-Cu+g(x,t,u)u_t+f(x,t,u)=0,$$

对 t 求导得:

$$u_{ttt}-u_{txx}-Cu_t+gu_{tt}+g_tu_t+g_uu_t^2+f_t+f_uu_t=0,$$

乘 u_{tt} 积分:

$$\sigma_0\|u_{tt}\|^2\leqslant\int_0^\pi\int_0^{2\pi}|g|u_{tt}^2dtdx\leqslant\int_0^\pi\int_0^{2\pi}|f_t+(f_u+g_t)u_t$$

$$+g_uu_t^2|\,|u_{tt}|\,dtdx\leqslant K\|u_{tt}\|+\frac{\sigma_0}{2}\|u_{tt}\|^2$$

$$+K\int_0^\pi\int_0^{2\pi}u_t^4dxdt,$$

或

$$\|u_{tt}\|^2\leqslant K+K_3\int_0^\pi\int_0^{2\pi}u_t^4dxdt,$$

$\forall a\in[0,2\pi]$, 取截断函数

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & |t-a|\leqslant\gamma,\\ 0, & |t-a|\geqslant 2\gamma,\end{cases}$$

中间用直线连接，则

$$\int_{a-\gamma}^{a+\gamma} u_t^4 dt \leqslant \int_{a-2\gamma}^{a+2\gamma} u_t^4 \eta(t) dt$$

$$= -\int_{a-2\gamma}^{a+2\gamma} [3uu_t^2 u_{tt}\eta(t) + uu_t^3\eta'(t)] dt$$

$$= -3\int_{a-2\gamma}^{a+2\gamma} [u(x, t) - u(x, a)] u_t^2 u_{tt}\eta(t) dt$$

$$- \int_{a-2\gamma}^{a+2\gamma} [u(x, a) + u(x, t)] u_t^3 \eta'(t) dt$$

$$\leqslant 6\|u\|_{1/2}\gamma^{1/2}\int_{a-2\gamma}^{a+2\gamma} u_t^2 |u_{tt}| dt$$

$$+ \frac{K}{\gamma}\int_{a-2\gamma}^{a+2\gamma}\left[\frac{\gamma u_t^4}{6K} + \left(\frac{6K}{\gamma}\right)^3\right] dt,$$

令 $\gamma = \pi/m$, $a = \gamma, 3\gamma, \cdots, (2m-1)\gamma$，诸式相加得：

$$\int_0^{2\pi} u_t^4 dt \leqslant 2\|u\|_{1/2}\gamma^{1/2}\int_0^{2\pi} u_t^2|u_{tt}| dt + \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} u_t^4 dt + \frac{K_1}{\gamma^4}$$

$$\leqslant \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} u_t^4 dt + 108\gamma\|u\|_{1/2}^2\int_0^{2\pi} u_{tt}^2 dt + \frac{K_1}{\gamma^4},$$

因此

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} u_t^4 dx dt \leqslant 324\gamma\|u\|_{1/2}^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} u_{tt}^2 dx dt + K_2\gamma^{-4},$$

取 γ 小，联合上面两个不等式得：$\|u_{tt}\| \leqslant K$, $\|u_t^2\| \leqslant K$，因此有：

$$F_t = [(C+1)u - (g-\sigma)u_t - f]_t \in L^2.$$

仿上法得到：

$$u_t \in C^{1/2}, \quad 导出 |u_t| \leqslant K.$$

由二阶微分式子

$$u_{ttx} - u_{xxx} - Cu_x + gu_{tx} + g_x u_t + g_u u_t u_x + f_x + f_u u_x = 0,$$

得到

$$\sigma_0\|u_{tx}\|^2 \leqslant \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |g(x, t, u)|^2 u_{tx}^2 dx dt$$

$$\leqslant \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |f_x + (g_x + f_u)u_x + g_u u_t u_x| |u_{tx}| dx dt$$

$$\leqslant K\|u_{tx}\| + \frac{\sigma_0}{2}\|u_{tx}\|^2 + K\|u_x\|^2.$$

故有 $\|u_{tx}\| \leqslant K$，$F_x = [(C+1)u - (g-\sigma)u_t - f]_x \in L^2$，$u_x \in C^{1/2}$，由此导出 $u \in C^{3/2} \Rightarrow u \in C^1$． 再证 $u \in C^2$，$C^3, \cdots$，证明更容易一些．定理证毕．

注：本章是应用 Schauder 不动点定理，证明非线性问题解为存在的一例，系数 $f(x, t, u)$ 限制为几乎线性． 采用不同的不动点定理，[10] 中证明了非共振情况系数 $f(x, t, u)$ 含有一定的超线性项，仍能证出解为存在．

存在的问题为：[10] 中超线性项的限制次数能否再放宽？又能否把结果推广到共振情况．

第三章　非线性 Schrödinger 方程的初值问题[11]

§1　一些预备知识

复变函数中的三线定理　$f(z)(z=x+iy)$ 于带形区域 $\Omega=\{z \mid x_1<x<x_2\}$ 中为有界解析，于 $\bar{\Omega}$ 中为连续，且 $\max\limits_{y\in R}|f(x_j+iy)|\leqslant M_j$，$(j=1,2)$，则

$$|f(z)|\leqslant M_1^{\frac{x_2-x}{x_2-x_1}}M_2^{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}.$$

证　令

$$f(z)=F(z)\exp\left(\frac{x_2-z}{x_2-x_1}\log M_1+\frac{z-x_1}{x_2-x_1}\log M_2\right),$$

则

$$\max_{\partial\Omega}|F(z)|\leqslant 1,\quad \max_{\Omega}|F(z)|\leqslant K.$$

记

$$F_\varepsilon(z)=F(z)e^{\varepsilon z^2},\quad (\varepsilon>0),$$

则 $F_\varepsilon(z)$ 于 Ω 解析，且

$$|F_\varepsilon(z)|\leqslant Ke^{\varepsilon[\max(x_1^2,x_2^2)-y^2]}\to 0,\quad 当\ |y|\to\infty,$$

故在 $\bar{\Omega}$ 中 $|F_\varepsilon(z)|$ 的最大值只能在 $x=x_1$，$x=x_2$ 上取，即

$$\max_{\bar{\Omega}}|F_\varepsilon(z)|\leqslant\max_{\partial\Omega}|F_\varepsilon(z)|\leqslant\max_{\partial\Omega}|F(z)|\max_{\partial\Omega}|e^{\varepsilon z^2}|$$
$$\leqslant e^{\varepsilon\max(x_1^2,x_2^2)},$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得：

$$\max_{\bar{\Omega}}|F(z)|\leqslant 1.$$

因此

$$|f(z)| \leqslant \left|\exp\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\log M_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\log M_2\right)\right|$$

$$= M_1^{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}} M_2^{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}.$$

定理证毕.

注 1: 三线定理条件中, $f(z)$ 于 Ω 有界显然可减弱为 $f(z) = O(e^{|y|^{1-\delta}})$, $(\delta > 0)$, 则定理结论仍为真.

注 2: 定理对 f 是向量函数,值域在某一 Banach 空间中仍为真. 例如 f 是有限维向量 $f(z) = \sum_{j=1}^{M} f_j(z)e_j$, $(e_j \in B)$, 绝对值要换为范数. 当 f 是无穷维向量,则 f 的解析性要稍加定义,可使定理为真.

Riesz-Thorin 插值定理 设 E_1, E_2 为可测空间, 具有非负全可加测度 μ, ν (下面具体应用中 E_1, E_2 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Euclid 测度空间, μ, ν 为 Euclid 测度). T 为线性映象, 映 E_1 上的简单函数到 E_2 上 (简单函数是取有限个值的可测函数, 简单函数于 L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 中稠), 且 T 为 (α_j, β_j) 型 $(1 \leqslant \alpha_j, \beta_j \leqslant \infty)$, 范数为 $M_j (j = 1, 2)$. 记 $\frac{1}{\alpha} = \frac{1-\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2}$, $\frac{1}{\beta} = \frac{1-\lambda}{\beta_1} + \frac{\lambda}{\beta_2}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, 则 T 为 (α, β) 型,范数 $\leqslant M_1^{1-\lambda} M_2^{\lambda}$.

T 为 (α_j, β_j) 型,范数为 M_j, 定义为

$$|Tf|_{L^{\beta_j}} \leqslant M_j |f|_{L^{\alpha_j}},$$

即

$$\left(\int_{E_2} |Tf|^{\beta_j} d\nu\right)^{1/\beta_j} \leqslant M_j \left(\int_{E_1} |f|^{\alpha_j} d\mu\right)^{1/\alpha_j}.$$

证 $\alpha = \infty$ 或 $\beta = 1$ 时引起 $\lambda = 0$ 或 1, 此情况下定理已为真. 故只要设 $\alpha < \infty$, $\beta > 1$ 来证明定理即可.

令

$$\alpha(z) = \left(\frac{1-z}{\alpha_1} + \frac{z}{\alpha_2}\right)^{-1},\ \beta(z) = \left(\frac{1-z}{\beta_1} + \frac{z}{\beta_2}\right)^{-1},$$

则

$$\alpha = \alpha(\lambda),\ \beta = \beta(\lambda).$$

设 f, g 分别为 E_1, E_2 中的简单函数，且设 f, g 满足标准化条件 $|f|_{L^\alpha}=|g|_{L^{\beta/(1-\beta)}}=1$. 我们要估计 $\int_{E_2} Tf\cdot g d\nu$.

当 $f=|f|e^{iu}$, $g=|g|e^{iv}$ 时，定义

$$F(z)=\begin{cases}|f|^{\frac{\alpha}{\alpha(z)}}e^{iu}, & (f\neq 0),\\ 0, & (f=0);\end{cases}$$

$$G(z)=\begin{cases}|g|^{\frac{\beta[\beta(z)-1]}{(\beta-1)\beta(z)}}e^{iv}, & (g\neq 0),\\ 0, & (g=0).\end{cases}$$

当 u, v 固定时，$F(z)$, $G(z)$ 是 z 的解析函数. 当 z 固定时，它们是简单函数. 因此

$$I(z)=\int_{E_2} T(z)\cdot G(z)d\nu$$

于 $\Omega=\{z|0<\operatorname{Re} z<1\}$ 中为解析. 要证 $I(z)$ 于 $\bar{\Omega}$ 中为有界. 设 f 的非零值为 $C_1,\cdots,C_m$, f 取值 C_j 的集合的特征函数记为 $\sigma_j(1\leqslant j\leqslant m)$; g 的非零值为 $C_1',\cdots,C_M'$, g 取 C_j' 的集合的特征函数为 $\sigma_j'(1\leqslant j\leqslant M)$, 则

$$F(z)=\sum_j \sigma_j|C_j|^{\frac{\alpha}{\alpha(z)}}e^{iu_j},\quad (u_j=\arg C_j),$$

$$G(z)=\sum_k \sigma_k'|C_k'|^{\frac{\beta[\beta(z)-1]}{(\beta-1)\beta(z)}}e^{iv_k},\quad (v_k=\arg C_k'),$$

$$I(z)=\sum_{j,k}|C_j|^{\frac{\alpha}{\alpha(z)}}|C_k'|^{\frac{\beta[\beta(z)-1]}{(\beta-1)\beta(z)}}e^{i(u_j+v_k)}\int_{E_2}T\sigma_j\cdot\sigma_k'd\nu,$$

$$|I(z)|\leqslant\sum_{j,k}|C_j|^{\frac{\alpha}{\alpha(z)}}|C_k'|^{\frac{\beta[\beta(z)-1]}{(\beta-1)\beta(z)}}\left|\int_{E_2}T\sigma_j\cdot\sigma_k'd\nu\right|\leqslant K,$$

$$(\operatorname{Re}z=x,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ y\in \boldsymbol{R}).$$

当 $\operatorname{Re} z=x=0$ 时，由 Hölder 不等式及 T 的定义得:

$$|I(z)|\leqslant|TF(z)|_{L^{\beta_1}}|G(z)|_{L^{\beta_1/(\beta_1-1)}}$$
$$\leqslant M_1|F(z)|_{L^{\alpha_1}}|G(z)|_{L^{\beta_1/(\beta_1-1)}},$$

由于当 $\operatorname{Re} z=x=0$ 时，如果 $f=C_j$, 则 $F=|C_j|^{\frac{\alpha}{\alpha(z)}}e^{iu_j}$. 因此

$$|F|=|f|^{\alpha/\alpha_1},$$

$$|F(z)|_{L^{\alpha_1}} = \left(\int_{E_1} |F(z)|^{\alpha_1} d\mu\right)^{1/\alpha_1} = \left(\int_{E_1} |f|^{\alpha} d\mu\right)^{1/\alpha_1}$$
$$= |f|_{L^{\alpha}}^{\alpha/\alpha_1} = 1.$$

同法有:

$$|G(z)|_{L^{\beta_1/(\beta_1-1)}} = 1.$$

由此得到

$$|I(z)| \leqslant M_1, \quad (\operatorname{Re} z = 0).$$

同法得

$$|I(z)| \leqslant M_2, \quad (\operatorname{Re} z = 1).$$

故由三线定理得:

$$|I(\lambda)| \leqslant M_1^{1-\lambda} M_2^{\lambda},$$

即

$$\left|\int_{E_2} Tf \cdot g d\nu\right| \leqslant M_1^{1-\lambda} M_2^{\lambda}.$$

上式对所有标准化的简单函数 g 为真. 由于简单函数于 $L^{\beta/(1-\beta)}$ 中为稠,得到

$$\|Tf\|_{L^{\beta}} = \sup \left|\int_{E_2} Tf \cdot g d\nu\right| \leqslant M_1^{1-\lambda} M_2^{\lambda},$$

去掉 $|f|_{L^{\alpha}} = 1$ 的假设,由上式得

$$|T(f/|f|_{L^{\alpha}})|_{L^{\beta}} \leqslant M_1^{1-\lambda} M_2^{\lambda},$$
$$|Tf|_{L^{\beta}} \leqslant M_1^{1-\lambda} M_2^{\lambda} |f|_{L^{\alpha}}.$$

定理证毕.

注: 由于简单函数于 $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 中稠, 因此定理中简单函数换为可积函数,定理的结论仍然成立.

§2 线性 Schrödinger 方程的初值问题

先看最简单的情况

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = 0, & (x, t) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^+, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \boldsymbol{R}, \end{cases}$$

其中 u, φ 都是复值函数. 上述初值问题有一解法公式,可由

$$\begin{cases} u_t = a u_{xx}, & (a \text{ 为正常数}), \\ u|_{t=0} = \varphi \end{cases}$$

的解法公式

$$u = \frac{1}{(4\pi a)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4at}} d\xi$$

形式上令 $a = i$ 而得出. 这一形式上的做法是否合理呢? 先证解法公式当 a 为常数且 $\mathrm{Re}\, a > 0$ 时为有效.

首先看 $\varphi \in L^2(\boldsymbol{R})$ 时, 令

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} U(\xi, t) d\xi,$$

则

$$u_{xx} = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \xi^2 U(\xi, t) d\xi.$$

由 $u_t = a u_{xx}$ 得 $U_t + a\xi^2 U = 0$, $U = U(\xi, 0) e^{-a\xi^2 t}$, 记 $U(\xi, 0) = \Phi(\xi)$, 则

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \Phi(\xi) d\xi,$$

因此

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} \varphi(y) dy,$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \Phi(\xi) e^{-a\xi^2 t} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2 t + i\xi(x-y)} \varphi(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2 t + i\xi(x-y)} d\xi, \end{aligned}$$

上式中积分交换次序合法需 $\mathrm{Re}\, a > 0$, 由此得:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}} \varphi(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{at}\left[\xi - \frac{i(x-y)}{2}\right]^2} d\xi.$$

当 $\mathrm{Re}\, a > 0$ 时, 用围道积分法使对 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{at}\left[\xi - \frac{i(x-y)^2}{2}\right]^2} d\xi$ 施行移轴与转轴成为有效, 而得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{at}\left[\xi - \frac{i(x-y)^2}{2}\right]^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{at}} d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \left(\frac{\pi}{at}\right)^{1/2},$$

因此

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi a t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}} \varphi(y) dy$$

$$= \frac{1}{(\pi a)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2/a} \varphi(x + 2\sqrt{t}\,\eta) d\eta.$$

当 φ 光滑且具紧支集时，令 $a \to i + 0$,

$$u(x, t) \to \frac{1}{(\pi i)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2/i} \varphi(x + 2\sqrt{t}\,\eta) d\eta,$$

得到解法公式

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi i t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4it}} \varphi(y) dy,$$

其中 $(i)^{1/2}$ 代表主值，即 $(i)^{1/2} = e^{i\pi/4}$. 实部与虚部分开来写，方程与初值条件成为：

$$\begin{cases} u_t^1 + u_{xx}^2 = 0, & u_t^2 - u_{xx}^1 = 0, \\ u^1|_{t=0} = \varphi^1(x), & u^2|_{t=0} = \varphi^2(x), \end{cases}$$

此方程组的解法公式为

$$u^1(x, t) + iu^2(x, t) = \frac{1 - i}{\sqrt{8\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos\frac{(x-y)^2}{4t}\right.$$

$$\left. + i\sin\frac{(x-y)^2}{4t}\right] [\varphi^1(y) + i\varphi^2(y)] dy,$$

当 φ 适当光滑时，不难证明上述公式为经典解.

除了解法公式外，还可导出守恒律如下：

由 $u_t = iu_{xx}$, 乘 $2\bar{u}$ 于 $[-X, X] \times [0, t]$ 积分，并取实部得

$$\int_{-X}^{X} |u|^2 dx \Big|_{t=0}^{t=t} = \int_0^t i(\bar{u}u_x - u\bar{u}_x) dt \Big|_{x=-X}^{X}.$$

当 φ 具紧支集，则当 $X \to \pm\infty$ 时，$u(X, t) \to 0$, $u_x(X, t) \to 0$, 故得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2 dx,$$

这是质量守恒的式子.

方程对 x 微分,乘 $2\bar{u}_x$ 积分,取实部,类似于上面做法得:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u_x|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_x|^2dx,$$

这是能量守恒式子. 同法得:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|D_x^k u|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}|D^k\varphi|^2dx, \quad (k = 2, 3, \cdots).$$

高维线性 Schrödinger 方程初值问题情况类似:

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

的解法公式(暂设 φ 具紧支集)为:

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}}\int_{R^n} e^{-\frac{\Sigma(x_i-y_i)^2}{4it}}\varphi(y)dy \equiv R(t)\varphi,$$

且有守恒式子

$$\|R(t)\varphi\|_{L^2(R^n)} = \|\varphi\|_{L^2(R^n)}$$

等. 由于光滑,具紧支集函数在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 中稠, 上面解法公式取闭包得: 算子 $R(t)$ 映 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 入 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 且为等距算子, 又由解法公式知 $R(t)$ 映 $L(\boldsymbol{R}^n)$ 入 $L^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 且有:

$$\|R(t)\varphi\|_{L^\infty} \leqslant (4\pi t)^{-n/2}\|\varphi\|_L.$$

当 $\varphi \in L \cap L^2$ 时,由 Riesz-Thorin 公式: $\alpha_1 = 1, \beta_1 = \infty, M_1 = (4\pi t)^{-n/2}$; $\alpha_2 = 2, \beta_2 = 2, M_2 = 1, \alpha = \tilde{q}, \beta = q, \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1\right)$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{\infty} + \frac{\lambda}{2}$, $[(4\pi t)^{-n/2}]^{1-\lambda} \times 1^\lambda = (4\pi t)^{n/q-n/2}$, 由此得到:

$$\|R(t)\varphi\|_{L^q} \leqslant (4\pi t)^{n/q-n/2}\|\varphi\|_{L^{\tilde{q}}}, \quad (2 < q < \infty),$$

由于 $L \cap L^2$ 在 $L^{\tilde{q}}$ 中稠, 取闭包知解法公式对 $\forall\varphi \in L^{\tilde{q}}$ 成立, 且 $R(t)\varphi \in L^q$.

这一个解的光滑性与初值光滑性的关系是 $\varphi \in L^{\tilde{q}} \to u \in L^q$ $(1 \leqslant \tilde{q} \leqslant 2)$, 与其它方程均不相同. 椭圆、抛物方程的解比初、边值数据光滑得多;双曲方程解的光滑性比初值光滑性相差很多; Schrödinger 方程解的光滑性基本上与初值光滑性差不多.

对非齐次问题

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = f(x, t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

由迭加原理得到解法公式为:

$$\begin{aligned} u &= R(t)\varphi + \int_0^t R(t-s)f(s)ds \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^n} R(x-\xi, t)\varphi(\xi)d\xi \\ &\quad + \int_0^t \int_{\boldsymbol{R}^n} R(x-\xi, t-s)f(\xi, s)d\xi ds, \end{aligned}$$

此情况下也可推导能量不等式,不予详述.

§3 非线性 Schrödinger 方程的初值问题

现考察非线性 Schrödinger 方程初值问题:

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = F(u), & (x, t) \in (\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^+), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \boldsymbol{R}, \end{cases}$$

此问题分两种情况:

情况 1. $F(u) = f(|u|^2)u$, 其中 f 是实值函数, 此情况下有质量、能量守恒公式,接近于实际中发生的情况.

情况 2. $F(u)$ 为一般情况. 从方程角度研究它的初值问题,得出如下结果:

定理 1 设 $F(u) \in C^1(\boldsymbol{R})$, $F'(u) = O(1)$, $(u \in \boldsymbol{R})$, 且当 u 小时有 $F(u) = O(|u|^p)$, $F'(u) = O(|u|^{p-1})$, 其中 p 满足

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < p < \frac{n+2}{n-2},$$

($n = 1, 2$ 时, p 在右边不受限制). 再设 $\varphi \in L(\boldsymbol{R}^n) \cap W_2^k(\boldsymbol{R}^n)$ 满足

$$\|\varphi\|_L, \ \|\varphi\|_{L^2}, \ \|D^k\varphi\|_{L^2} < \delta,$$

其中 δ 为给定的某一小正数, k 由 $n/2 < k < n/2 + 1$ 定出,则非线性 Schrödinger 方程初值问题

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = F(u), \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

存在唯一的广义解 $u \in C(L^2(\boldsymbol{R}^n), \boldsymbol{R}^+)$，满足初值 $u|_{t=0} = \varphi$ 按 $C(L^2(\boldsymbol{R}^n), \boldsymbol{R}^+)$ 意义，满足方程按

$$i(u(s), v(s)) \Big|_{s=0}^{s=t} + \int_0^t (u(s), iv_s + \Delta v) ds = \int_0^t (F(u(s)), v(s)) ds,$$

$\forall v$ 使 $v, v_t, D_x^2 v \in C(L^2(\boldsymbol{R}^n), \boldsymbol{R}^+)$ 意义.

又 u 满足下列条件:

$$\|u(t)\|_{L^2} \leqslant K_1,$$
$$\|u(t)\|_{L^{p+1}} \leqslant K_2(1+t)^{-n(p-1)/[2(p+1)]},$$
$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leqslant K_3(1+t)^{-\min(1/2,(p-3)/2)},$$

$n = 1$, $p = 4$ 时右端添加因子 $\log(1+t)$.

$$\|u(t)\|_{L^{2n/(n-2+2\varepsilon)}} \leqslant K_4(1+t)^{\varepsilon-\min(1,n[pn/(n+2-2\varepsilon)-1])},$$

$n \geqslant 2$, $0 < \varepsilon < 1 - n(p-1)/[2(p+1)]$; 当 $n[pn/(n+2-2\varepsilon)-1] = 1$ 时，右端添加因子 $\log(1+t)$.

注 1: 定理中 $u \in C(L^2(\boldsymbol{R}^n), \boldsymbol{R}^+)$ 的条件是指 $\forall t \in (0, \infty)$，当 $\delta t \to 0$ 时有

$$\|u(x, t+\delta t) - u(x, t)\|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)} \to 0.$$

注 2: p 满足的两个不等式，可变形为

$$2(p+1)/[p(p-1)] < n < 2(p+1)/(p-1),$$

因此

$$1 - n(p-1)/[2(p+1)] > 0,$$

即满足条件 $0 < \varepsilon < 1 - n(p-1)/[2(p+1)]$ 的 ε 为存在.

证 非线性初值问题的解是下面两个问题的解的不动点 $w + W = V$:

$$\begin{cases} iw_t + \Delta w = 0, \\ w|_{t=0} = \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} iW_t + \Delta W = F(V), \\ W|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

先对 w, W 做估计，再看用什么不动点定理较为合适.

对 w 的估计: 由 Riesz-Thorin 公式得:

$$\|w\|_{L^q} = \|R(t)\varphi\|_{L^q} \leqslant (4\pi t)^{n/q-n/2}\|\varphi\|_{L^{\tilde q}}$$
$$\leqslant K_5 t^{n/q-n/2}(\|\varphi\|_L + \|\varphi\|_{L^2}),$$
$(q \geqslant 2)$. 这一估计当 t 大时是有效的，但 t 小时由于 $t^{n/q-n/2} \to \infty$ $(q > 2, t \to +0)$，估计失效，因此要补加 t 小时的估计.

由 $\|D_x^k w\|_{L^2} = \|D^k\varphi\|_{L^2}$ 与嵌入定理得:
$$\|w\|_{L^q} \leqslant \|w\|_{L^\infty}^{(q-2)/q}\|w\|_{L^2}^{2/q}$$
$$\leqslant (K_6\|w\|_{L^2} + K_7\|D_x^k w\|_{L^2})^{(q-2)/q}\|w\|_{L^2}^{2/q}$$
$$= (K_6\|\varphi\|_{L^2} + K_7\|D^k\varphi\|_{L^2})^{(q-2)/q}\|\varphi\|_{L^2}^{2/q},$$
上述两估计式结合得到
$$|||w|||_q \equiv \sup_{t\geqslant 0}[(1+t)^{n/2-n/q}\|w\|_{L^q}]$$
$$\leqslant K_8(\|\varphi\|_L + \|\varphi\|_{L^2} + \|D^k\varphi\|_{L^2}),$$
上式中 $|||\cdot|||_q$ 满足范数的所有条件.

再估计 W: $W(t) = \int_0^t R(t-s)F(V(s))ds$
$$\|W\|_{L^{p+1}} \leqslant K_{11}\int_0^t (t-s)^{n/(p+1)-n/2}\||V(s)|^p\|_{L^{1+1/p}}ds$$
$$= K_{11}\int_0^t (t-s)^{n/(p+1)-n/2}\|V(s)\|_{L^{p+1}}^p ds$$
$$\leqslant K_{12}|||V|||_{p+1}^p \int_0^t (t-s)^{-n(p-1)/[2(p+1)]}$$
$$\cdot (1+s)^{-np(p-1)/[2(p+1)]}ds$$
$$\leqslant K_{13}|||V|||_{p+1}^p(1+t)^{-n(p-1)/[2(p+1)]}.$$
因此 $|||W|||_{p+1} \leqslant K_{13}|||V|||_{p+1}^p$. 由于做不到映象 $V \to W$ 为紧，因此凡用到算子为紧的不动点定理如 Schauder 不动点定理，Leray-Schauder 拓扑度定理等是不能用的，未用到算子紧性的压缩映象原理可能好用，这是因为，上式表示 $|||W|||_{p+1}$ 用 $|||V|||_{p+1}$ 的 p 次方估计. 因此令

$V = u^{(m-1)}$, $w + W = u^{(m)}$, $(m = 1, 2, \cdots)$, 又令 $u^{(0)} = w$ 得
$$|||u^{(m)} - w|||_{p+1} \leqslant K_{13}|||u^{(m-1)}|||_{p+1}^p,$$
$$|||u^{(m)}|||_{p+1} \leqslant |||w|||_{p+1} + K_{13}|||u^{(m-1)}|||_{p+1}^p.$$

当 $|||w|||_{p+1}$ 小,使

$$K_{13}|||w|||_{p+1}^{p-1} \leqslant \frac{1}{2^p}$$

时,则可应用归纳法证得:

$$|||u^{(m)}|||_{p+1} \leqslant 2|||w|||_{p+1} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots),$$

这是因为,当 $m = 0$ 时,$u^{(0)} = w$,上式为真. 设上式当 $m-1$ 时为真,则有:

$$|||u^{(m)}|||_{p+1} \leqslant |||w|||_{p+1} + K_{13}|||u^{(m-1)}|||_{p+1}^{p}$$
$$\leqslant |||w|||_{p+1} + K_{13}(2|||w|||_{p+1})^p \leqslant 2|||w|||_{p+1}.$$

归纳法证毕. 再又有

$$|||u^{(m+1)} - u^{(m)}|||_{p+1} = \sup_{t\geqslant 0}\left\{(1+t)^{n/2-n/(p+1)}\left\|\int_0^t R(t - s)[F(u^m) - F(u^{m-1})]ds\right\|_{L^{p+1}}\right\}$$

$$\leqslant K_{14}\sup_{t\geqslant 0}\left\{(1+t)^{n/2-n/(p+1)}\int_0^t (t-s)^{n/(p+1)-n/2}\|(u^{(m)} - u^{(m-1)})F'(\theta u^{(m)} + (1-\theta)u^{(m-1)})\|_{L^{1+1/p}}ds\right\}$$

$$\leqslant K_{15}|||w|||_{p+1}^{p-1}\,|||u^{(m)} - u^{(m-1)}|||_{p+1}, \quad (0 < \theta < 1),$$

上式的成立,是用了 Riesz-Thorin 公式,Hölder 不等式,$F'(u) = O(|u|^{p-1})$ 的假设,以及 $|||u^{(m)}|||_{p+1} \leqslant 2|||w|||_{p+1}$ 的估计. 由上式可见,当 $|||w|||_{p+1}$ 很小使 $K_{15}|||w|||_{p+1}^{p-1} = \delta_1 < 1$ 成立时,有

$$|||u^{(m+1)} - u^{(m)}|||_{p+1} \leqslant \delta_1|||u^{(m)} - u^{(m-1)}|||_{p+1},$$

故 $u^{(m)}$ 在范数 $|||\cdot|||_{p+1}$ 之下收敛,$u^{(m)} \to u (m\to\infty)$. 要做到 $K_{15}|||w|||_{p+1}^{p-1} < 1$ 与 $K_{13}|||w|||_{p+1}^{p-1} \leqslant 1/2^p$ 同时成立,由估计式 $|||w|||_{p+1} \leqslant K_8(\|\varphi\|_L + \|\varphi\|_{L^2} + \|D^k\varphi\|_{L^2})$知,只要规定初值 $\|\varphi\|_L < \delta$,$\|\varphi\|_{L^2} < \delta$,$\|D^k\varphi\|_{L^2} \leqslant \delta$,$\delta$ 为适当小即可.

对极限函数 u 进行研究,首先有 $|||u|||_{p+1} \leqslant K_2$,即 $\|u\|_{L^{p+1}} \leqslant K_2(1+t)^{-n(p-1)/[2(p+1)]}$. 再 $iW_t + \Delta W = F(V)$ 用 $2\overline{W}$ 乘,积分取虚部得:

$$\|W(t)\|_{L^2}^2 = 2\mathrm{Im}\int_0^t ds\int_{R^n}\overline{W}F(V)dx$$

$$\leqslant 2\int_0^t \|W(s)\|_{L^{p+1}}\|F(V(s))\|_{L^{1+1/p}}ds$$

$$\leqslant K_{16}|||V|||_{p+1}^{2p}\int_0^t (1+s)^{-n(p-1)/2}ds,$$

由于 $n(p-1) > 2(1+1/p) > 2$，由上式得:

$$\|W(t)\|_{L^2} \leqslant K_{17}|||V|||_{p+1}^{p},$$

令 $V = u^{(m-1)}$, $W = u^{(m)} - w$ 代入上式并令 $w \to \infty$ 得到:

$$\|u - w\|_{L^2} \leqslant K_{17}|||u|||_{p+1}^{p}$$

由此式得:

$$u \in L^2(\boldsymbol{R}^n), \quad \forall t > 0,$$

且

$$\|u\|_{L^2} \leqslant \|\varphi\|_L + \|\varphi\|_{L^1} + K_1\|u\|_{p+1}^{p} \leqslant \widetilde{K}_1.$$

由 $W(t) = \int_0^t R(t-s)F(V(s))ds$ 得到，当 $n = 1$ 时，

$$|W(t)| \leqslant 4\pi\int_0^t (t-s)^{-1/2}|F(V(s))|_L ds$$

$$\leqslant K_{18}\int_0^t (t-s)^{-1/2}\||V(s)|^p\|_L ds$$

$$\leqslant K_{18}\|V\|_{L^2}^{2/(p-1)}|||V|||_{p+1}^{(p-2)(p+1)/(p-1)}$$

$$\cdot\int_0^t (t-s)^{-1/2}(1+s)^{1-p/2}ds$$

$$\leqslant K_{19}\|V\|_{L^2}^{2/(p-1)}|||V|||_{p+1}^{(p-2)(p+1)/(p-1)}$$

$$\cdot(1+t)^{-\min(1/2,(p-3)/2)}$$

$$\cdot\begin{cases}1, & \text{当 } p > 3,\ p \neq 4 \text{ 时},\\ \log(1+t), & \text{当 } p = 4 \text{ 时}.\end{cases}$$

当 $n \geqslant 2$, $0 < \varepsilon < 1 - n(p-1)/[2(p+1)]$ 时，应用 Riesz-Thorin 定理得:

$$\|W(t)\|_{L^{2n/(n-2+2\varepsilon)}} \leqslant K_{20}\int_0^t (t-s)^{\varepsilon-1}\|F(V(s))\|_{L^{2n/(n+2-2\varepsilon)}}ds$$

$$\leqslant K_{21}\int_0^t (t-s)^{\varepsilon-1}\||V(s)|^p\|_{L^{2n/(n+2-2\varepsilon)}}ds$$

$$\leqslant K_{22}\|V\|_{L^2}^{2(p+1)/(n+2-2\varepsilon)\{1-n(p-1)/[2(p+1)]-\varepsilon\}}$$

$$\cdot|||V|||_{p+1}^{2(p+1)/(p-1)[pn/(n+2-2\varepsilon)-1]}$$

$$\cdot\int_0^t (t-s)^{\varepsilon-1}(1+s)^{-n[pn/(n+2-2\varepsilon)-1]}ds$$

$$\leqslant K_{23}\|V\|_{L^2}^{2(p+1)/(n+2-2\varepsilon)\{1-n(p-1)/[2(p+1)]-\varepsilon\}}$$

$$\cdot |||V|||_{p+1}^{2(p+1)/(p-1)[pn/(n+2-2\varepsilon)-1]}$$

$$\cdot (1+t)^{\varepsilon\min\{1,n[pn/(n+2-2\varepsilon)-1]\}}$$

$$\cdot \begin{cases} 1, \text{ 当 } n(p-1)>2,\ n[pn/(n+2-2\varepsilon)-1]\neq 1 \text{ 时}, \\ \log(1+t), \text{ 当 } n[pn/(n+2-2\varepsilon)-1]=1 \text{ 时}. \end{cases}$$

用 $W=u^{(m)}-w$, $V=u^{(m-1)}$ 代入上面二式并令 $m\to\infty$，再结合 w 的估计，就得到 $\|u\|_{L^\infty}(n=1)$，$\|u\|_{L^{2n/(n-2+2\varepsilon)}}(n\geqslant 2)$ 的估计.

为了阐明解取初值的含义，还要估出

$$|||u(t+\delta t)-u(t)|||_{p+1}=O(|\delta t|)\|u(t+\delta t)-u(t)\|_{L^2}$$
$$=O(|\delta t|^{1/2}),$$

这两个估计可与上面的估计类似地导出. 由此得到:

$$u\in C^1(L^{p+1}(\boldsymbol{R}^n),\boldsymbol{R}^+)\cap C^{1/2}(L^2(\boldsymbol{R}^n),\boldsymbol{R}^+),$$

因而 u 取初值的意义为: $|||u(\delta t)-\varphi|||_{p+1}\to 0(\delta t\to 0)$
或

$$\|u(\delta t)-\varphi\|_{L^2}\to 0,\quad (\delta t\to 0).$$

再阐明解满足方程的含义: 当 v, v_t, $D_x^2 v\in C(L^2(\boldsymbol{R}^n),\boldsymbol{R})$时，用 $\bar v$ 乘

$$\begin{cases} iu_t^{(m)}+\Delta u^{(m)}=F(u^{(m-1)}), \\ u^{(m)}(0)=\varphi, \end{cases}$$

对 x, t 积分得:

$$i(u^{(m)},v)\Big|_{t=0}^{t=T}+\int_0^T(u^{(m)},iv_t+\Delta v)dt+\int_0^T(F(u^{(m-1)}),v)dt,$$

令 $m\to\infty$ 得:

$$i(u,v)\Big|_{t=0}^{t=T}+\int_0^T(u,iv_t+\Delta v)dt+\int_0^T(F(u),v)dt,$$
$$\forall T\in\boldsymbol{R}^+.$$

可证在此意义下的广义解为唯一如下: 当两个函数 u, $u+U\in C(L^2(\boldsymbol{R}^n),\boldsymbol{R}^+)$，满足初值条件与上面积分恒等式 ($\forall v$) 时，我们有 $U|_{t=0}=0$ 及

$$i(U(T),v(T))+\int_0^T(U,iv_t+\Delta v)dt$$

$$= \int_0^T ([F(u+U)-F(u)], v)dt, \qquad (1)$$

如在上式中能取 $v = U$，则由此取虚部得：

$$\frac{1}{2}\|U(T)\|_{L^2}^2 = \mathrm{Im}\int_0^T ([F(u+U)-F(u)], U)dx$$

$$\leqslant \max_{0<\theta<1} |F'(u+\theta U)| \int_0^T \|U(t)\|_{L^2}^2 dt$$

$$\leqslant K_{21}\int_0^T \|U(t)\|_{L^2}^2 dt, \quad \forall T \in \boldsymbol{R}^+,$$

最后等式的成立是应用条件 $F'(u) = O(1)(u \in \boldsymbol{R})$. 由此式即得 $U(x, t) = 0, \forall (x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^+$.

但直接令 $v = U$ 是不可能的，因为 v 满足条件 $v, v_t, D_x^2 v \in C(L^2(\boldsymbol{R}^n), \boldsymbol{R}^+)$，而对 u 与 $u+U$，仅具有性质 $u, u+U \in C(L^2(\boldsymbol{R}^n), \boldsymbol{R}^+)$，两者光滑性有差异. 克服这一困难的办法是取 v 为 U 的光滑化函数逼近.

[49] 中所述的光滑化子之一：

$$j(x) = \begin{cases} C\exp\left[\left(\frac{|x|^2}{\lambda^2}-1\right)^{-1}\right], & |x| < \lambda, \\ 0, & |x| \geqslant \lambda, \end{cases}$$

满足条件 $j(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $\int_{\boldsymbol{R}^n} j(x)dx = 1$, $j(x) = 0(|x| \geqslant \lambda)$, $j(x)$ 是 x 的偶函数, $j(x) = O(\lambda^{-n})$, $Dj(x) = O(\lambda^{-n-1})$. 同法定义单变量光滑化子 $k(t)$ 满足 $k(t) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$, $\int_{\boldsymbol{R}} k(t)\,dt = 1$, $k(t) = 0$ $(|t| \geqslant \mu)$, $k(t)$ 是 t 的偶函数, $k(t) = O(\mu^{-1})$, $k'(t) = O(\mu^{-2})$.

拓广 $U(x, t)$ 的定义于 $t < 0$ 为 $U(x, t) = 0 (t < 0)$. 由于 $U(x, 0) = 0$，故有 $U(x, t) \in C(L^2(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}))$.

取 $v(x, t) = \int_{\boldsymbol{R}^{n+1}} U(y, \tau)j(x-y)k(t-\tau)dyd\tau$，代入 (1)，取虚部并令 $\lambda \to 0$, $\mu \to 0$ 有(记 $\mathrm{Re}\,U = U_1$, $\mathrm{Im}\,U = U_2$)：

$$\|U(T)\|^2 + \lim_{\lambda\to 0} I_1 + \lim_{\mu\to 0} I_2 = \mathrm{Im}\int_0^T ([F(u+U)-F(u)], U)dt$$

其中

$$I_1 = \int_0^T dt \int_{R^n \times R^n} \Delta_x j(x-y)[U_1(y,t)U_2(x,t) - U_1(x,t)U_2(y,t)]dxdy,$$

$$I_2 = \int_{R^n} dx \int_0^T dt \int_{t-\mu}^{t+\mu} [U_1(x,t)U_1(x,\tau) + U_2(x,t)U_2(x,\tau)]k_t(t-\tau)d\tau,$$

由于 I_1, I_2 中最里面积分的被积函数是奇函数,故有:

$$I_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{R^n} dx \left(\int_{T-\mu}^T dt \int_T^{t+\mu} d\tau + \int_0^\mu dt \int_{-t}^0 d\tau\right)[U_1(x,t)U_1(x,\tau) + U_2(x,t)U_2(x,\tau)]k_t(t-\tau) \\ &= \int_{R^n} dx \int_{T-\mu}^T dt \int_T^{t+\mu} [U_1(x,t)U_1(x,\tau) + U_2(x,t)U_2(x,\tau)]k_t(t-\tau)d\tau \\ &= \|U(T)\|^2 \int_{T-\mu}^T dt \int_T^{t+\mu} k_t(t-\tau)d\tau + o(1) \\ &= -\frac{1}{2}\|U(T)\|^2 + o(1), \end{aligned}$$

因此有:

$$\frac{1}{2}\|U(T)\|^2 = \mathrm{Im}\int_0^T ([F(u+U) - F(u)], U)dt, \quad \forall T \in \boldsymbol{R}^+$$

定理 1 证毕.

定理 2 由定理 1 定出的非线性问题的解 $u(x,t)$, 当 t 很大时,近似于线性方程 $iu_t + \Delta u = 0$ 的一个解 $u_+(x,t)$ (在 L^2 意义下).

证 $u_+(x,t)$ 的具体式子是

$$u_+(x,t) = R(t)\varphi + \int_0^\infty R(t-s)F(u(s))ds,$$

它是

$$\begin{cases} iv_t + \Delta v = 0, \\ v|_{t=0} = \varphi + \int_0^\infty R(-s)F(u(s))ds \end{cases}$$

的解. 要证明这件事,应证明

$$\|u(x,t)-u_+(x,t)\|_{L^2}=\left\|\int_t^\infty R(t-s)F(u(s))ds\right\|_{L^2}\to 0,$$
$$(t\to\infty).$$
(附带地得到 $u_+(x,t)\in L^2$, $\forall t$). 由于
$$\left\|\int_t^\infty R(t-s)F(u(s))ds\right\|_{L^2}\leqslant\int_t^\infty\|F(u(s))\|_{L^2}ds,$$
因此,如能证明
$$\|F(u(s))\|_{L^2}=O((1+s)^{-1-\eta}),\tag{2}$$
而 $\eta>0$, 则本定理得证.

当 $n=1$ 时,
$$\begin{aligned}\|F(u(s))\|_{L^2}^2&\leqslant K\||u(s)|^{2p}\|_L\leqslant K\|u(s)\|_{L^{p+1}}^{p+1}\|u(s)\|_{L^\infty}^{p-1}\\&\leqslant\widetilde{K}(1+s)^{-(p+1)/2-(p-1)\min(1/2,(p-3)/2)}\\&\qquad\cdot\begin{cases}1, & (p\neq 4),\\ \log^{p-1}(1+s), & (p=4),\end{cases}\end{aligned}$$
当 $p\geqslant 4$ 时,
$$\frac{p-1}{2}+(p-1)\min\left(\frac{1}{2},\frac{p-3}{2}\right)=p-1>2.$$
当 $p<4$ 时, $p(p-1)>2(p+1)$, 即 $(p-1)(p-2)>4$, 因此
$$\frac{p-1}{2}+(p-1)\min\left(\frac{1}{2},\frac{p-3}{2}\right)=\frac{(p-1)(p-2)}{2}>2.$$
因此不论哪一情况, (2) 总成立

当 $n\geqslant 2$ 时,
$$\begin{aligned}\|F(u(s))\|_{L^2}^2&\leqslant K\||u(s)|^{2p}\|_{L^2}\\&\leqslant K\|u(s)\|_{L^{p+1}}^{\alpha}\|u(s)\|_{L^{2n/(n-2+2\varepsilon)}}^{2p-\alpha}\leqslant\widetilde{K}(1+s)^{-\beta},\end{aligned}$$
其中
$$\alpha=\frac{1-\dfrac{n-2+2\varepsilon}{n}p}{\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{n-2+2\varepsilon}{n}}=\frac{2p(1-\varepsilon)-n(p-1)}{1-\varepsilon-\dfrac{n(p-1)}{2(p+1)}},$$
$$\beta=\frac{n(p-1)}{2(p+1)}\alpha+(2p-\alpha)\Big[-\varepsilon$$

$$+\min\left(1, n\left(\frac{pn}{n+2-2\varepsilon}-1\right)\right)\Big].$$

当 $n[pn/(n+2-2\varepsilon)-1]>1$，即 $p>(1+1/n)[1+(2-2\varepsilon)/n]$ 时，

$$\begin{aligned}\beta &= 2p(1-\varepsilon)-\alpha\left[1-\varepsilon-\frac{n(p-1)}{2(p+1)}\right]\\&= 2p(1-\varepsilon)-[2p(1-\varepsilon)-n(p-1)]\\&= n(p-1)>\frac{2(p+1)}{p}>2,\end{aligned}$$

当 $p\leqslant(1+1/n)[1+(2-2\varepsilon)/n]$ 时，

$$\begin{aligned}\left[1-\varepsilon-\frac{n(p-1)}{2(p+1)}\right](\beta-2) &= \frac{np(p-1)}{2(p+1)}\frac{n^2+4}{n+2}\\&\quad+\frac{1}{2(p+1)}[n^2-2n-4-(n^2-2n+4)p]+O(\varepsilon)\\&=\left[\frac{np(p-1)}{2(p+1)}-1\right]\frac{n^2+4}{n+2}+\frac{1}{2(p+1)(n+2)}\\&\quad\cdot\left\{n^2(n-2)\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2-2\varepsilon}{n}\right)-p\right]\right.\\&\quad\left.+(n-2)^2\right\}+O(\varepsilon).\end{aligned}$$

由假设有：

$$1-\varepsilon-\frac{n(p-1)}{2(p+1)}>0,\quad \frac{np(p-1)}{2(p+1)}-1>0,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2-2\varepsilon}{n}\right)-p\geqslant 0,$$

因此当取 ε 适当小时有 $\beta-2>0$.

即不论是哪一种情况，(2) 总成立，定理证毕.

解的光滑性等的讨论见 [11].

本章中，解非线性初值问题的方法有两个特点. 一是适应于线性问题的估计，采用非紧性的不动点定理：压缩映象原理. 二是改变 [12]、[13] 中考察的空间 $L^2\cap L^\infty$ 为首先考察最适合于本问题的空间 L^{p+1}，因而对 $F(u)$ 的假设条件可较弱.

Schrödinger 方程的右端为 $F(u, D_x u)$ 的内初值问题，混合问题，外混合问题，边值可给函数及微商，已有 [14]、[15]、[16] 等的研究.

存在问题:

1. $p < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$ 时，非线性问题解的研究. 可能是当 $t < T_0$ (T_0 适当取定)解存在,而 $t \geqslant T_0$ 时,可举出反例说明解不存在,这是 Blow up 问题.

2. 解光滑性研究.

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = |u|^2 u, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

当 $\varphi \in L^\infty$, 但 $D\varphi \notin L^2$, 证明当 $t > 0$ 时, $u \in C^\infty$, 并推广去研究方程右端为 $F(u)$ 时,解的光滑性.

3. ∞ 处定解问题的研究.

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = F(u), \quad F \text{ 满足定理 1 的条件}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \end{cases}$$

由解的衰减性质得: 当 t 大时, $u \approx u_+ = R(t)\varphi + \int_0^\infty R(t - s)F(u(s))ds$, 如果给出 $u|_{t=+\infty} = u_+(x)$, 则 u 在 ∞ 处的状态已知,如何由此求出解 u? 这时解是否存在唯一?

4. $(\alpha + i\beta)u_t + \Delta u = F(u)$ 等定解问题的研究.

总之,非线性 Schrödinger 方程定解问题研究的成果尚少,还有大量可研究的问题.

第四章　高维亚音速绕流问题

§1 问题的介绍

亚音速气体绕障碍物的流动问题，在数学上即是求拟线性椭圆方程(速度势)的解，而在障碍物边界上法微商为零，且于无穷远处微商数值给定．在平面情况，该问题于[17]中已有较好的研究．今研究空间变量个数大于等于3的情况．当$n>3$时，这一问题没有实际意义，但仍不妨借用$n=3$时有实际意义的各种术语．

$n=3$时，[18]得到马赫数<0.7时解为存在、唯一的结果．[19]改进与推广[18]的结果到任何马赫数时解为存在、唯一．[20]对[19]的结果做了一定程度的简化；[21]将[19]的结果推广到有外力情况，并把解存在性的结果改为用变分法去证明，从而使问题的实际计算方法有了初步的途径．现叙述[19]的结果，并结合[20]的简化证明．

考察$\boldsymbol{R}^n$中在闭曲面Γ外部区域Ω内的拟线性边值问题：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=0,\\ \nabla\varphi|_{x=\infty}=u^{\infty}=(U,0\cdots,0),\\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial N}\right|_{\Gamma}=0,\end{cases}\tag{1}$$

其中φ是速度势，$\nabla\varphi=(u_1,\cdots,u_n)$是速度，$q=(\sum u_i^2)^{1/2}$是速率，$\rho=\rho(q)$是气体密度，$\nabla\varphi|_{x=\infty}=(U,0,\cdots,0)$表示在$\infty$

处的均匀来流，不失一般性取来流方向为 x_1 轴的正向 $(U \geqslant 0)$. $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right|_{\Gamma} = u_N|_{\Gamma} = 0$ (N 为 Γ 向 Ω 外的法线方向)表示障碍物 Γ 上气流的法线速度为零. 定解问题中,只有一个常数 U 是预先给定的. 自然,函数 $\rho(q)$ 为已给函数.

经过无因次化后,对完全气体

$$\rho(q) = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} q^2\right)^{1/(\gamma-1)},$$

其中常数 γ 为定压比热与定容比热之比，满足 $1 < \gamma < 2$. 我们对 $\rho(q)$ 的假设为: $\rho(q) > 0$, $\rho(0) = 1$, $\rho'(q) \leqslant 0$, $q'(0) = 0$, $\rho(q) \in C^2[0, q_{\lim}]$, 其中 $q_{\lim} \leqslant \infty$. 完全气体例子中 $q_{\lim} = \left(\frac{2}{\gamma - 1}\right)^{1/2}$.

上面方程不一定是椭圆型方程,其展开为:

$$\sum\left(\rho\delta_{ij} + \frac{\rho'}{q}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}\right)\varphi_{x_ix_j} = 0, \quad \delta_{ij} = \begin{cases}1, & (i = j),\\ 0, & (i \neq j).\end{cases}$$

计算二次型

$$\sum\left(\rho\delta_{ij} + \frac{\rho'}{q}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}\right)\xi_i\xi_j = \rho\sum\xi_i^2 + \frac{\rho'}{q}(\sum\varphi_{x_i}\xi_i)^2$$

的特征值. 做转轴变换，使 $(\varphi_{x_1}, \cdots, \varphi_{x_n}) \to (q, 0, \cdots, 0)$, $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \to (\eta_1, \cdots, \eta_n)$, 则上式化为:

$$\rho\sum\eta_i^2 + \rho' q\eta_1^2$$

故得到特征值 $\lambda_1 = \rho + \rho' q$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \rho$. 由此可见，当 $\lambda_1 = \rho + \rho' q > 0$ 时，方程为椭圆型. 对应的点 $(x_1, \cdots, x_n, \varphi)$ 称椭圆型点. 当 $\lambda_1 < 0$ 时,对应的点 $(x_1, \cdots, x_n, \varphi)$ 称双曲型点.

由贝努里方程 $\frac{q^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} = C$ (p 为压强)及音速定义 $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$ 得 $c^2 = -\frac{\rho q dq}{d\rho} = -\frac{\rho q}{\rho'(q)}$. 又 $M = q/c$ 称为 March 数. 故得

$$M^2 = \frac{q^2}{c^2} = \frac{-\rho' q}{\rho} = 1 - \frac{\lambda_1}{\rho},$$

当 $\lambda_1 > 0$ 时，$M < 1$，当 $\lambda_1 < 0$ 时，$M > 1$. 因此椭圆型点与双曲型点分别为亚音速 ($M < 1$) 点与超音速 ($M > 1$) 点，$\lambda_1 = 0$ 即 $M = 1$ 的点为音速点，对应的 $q = q_c$ 称为临界速度.

对完全气体，$q_c = [2/(\gamma + 1)]^{1/2}$.

$\bar{\Omega}$ 中所有点均为亚音速(超音速)点，则称定解问题的解为亚音速流(超音速流). $\bar{\Omega}$ 中亚音速点与超音速点同时存在，称跨音速流. 跨音速流的研究较复杂，至今关于定解问题解的存在、唯一的结果很少，仅有假设解为存在，而进行数值计算的某些实用方法. 这种情况，使得亚音速定解问题的研究带有某些复杂性. 即来流 $q_\infty = U < q_c$，$M_\infty < 1$，不一定有 $\max\limits_{\bar{\Omega}} M < 1$. $q_\infty = U$ 相当小，可做到 $\max\limits_{\bar{\Omega}} M < 1$，但 U 大到什么程度，仍有 $\max\limits_{\bar{\Omega}} M < 1$ 呢?

定解问题提法中 $\Delta\varphi|_{x=\infty} = (U, 0, \cdots, 0)$ 的条件，不仅说明来流为均匀，且在整个流场的 ∞ 处都为均匀. 这不合于实际情况，实际情况总有尾迹. 假设整个流场在 ∞ 处为均匀(略去尾迹)，不仅是原问题适当的近似.

障碍物 Γ 可以是一个闭曲面或几个闭曲面. 设有常数 $\tau_0 > 0$ 使

$$\Gamma \in c^{2+\tau_0}.$$

为了克服不明确 U 大到什么程度，仍有 $\max\limits_{\Omega} M < 1$ 的困难，先求解辅助问题:

$$\begin{cases} \sum \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = 0, \\ \dfrac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\Big|_{x=\infty} = (1, 0, \cdots, 0), \\ \max\limits_{\bar{\Omega}} |\nabla\varphi| = Q(< q_c), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial N}\Big|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

辅助问题中，只有一个常数 Q 是预先给定的. 我们要用 Leray-

Schauder 拓扑度定理来证明该问题的解为存在. 先作出它的线性化问题. 由于用$\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho(q)\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\right)=0$ 作为线性化方程时，$\varphi\to\Phi$ 不是紧映象，因此改为用

$$\sum\left[\rho(q)\delta_{ij}+\frac{\rho'}{q}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}\right]\Phi_{x_ix_j}=0$$

作为线性化方程，在条件 $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right|_{\Gamma}=0$, $\left[\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\right]_{\infty}=(1, 0, \cdots, 0)$, $\max\limits_{\Omega}|\nabla\Phi|=Q$ 之下，可证映象 $\varphi\to\Phi$ 为紧. 记 $\Phi=Q(\Psi+x_1)/\max\limits_{\bar\Omega}|\nabla(\Psi+x_1)|$，由于 $\nabla\Psi|_{x=\infty}=0\Leftarrow\Psi|_{\infty}=0$ 得

$$\begin{cases}\sum\left[\rho(q)\delta_{ij}+\frac{\rho'}{\rho}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}\right]\Psi_{x_ix_j}=0,\\ \Psi|_{\infty}=0,\\ \left.\frac{\partial\Psi}{\partial N}\right|_{\Gamma}=-\left.\frac{\partial x_1}{\partial N}\right|_{\Gamma}=-\cos(N, x_1)|_{\Gamma}.\end{cases}$$

首先要对这一线性定解问题的性质做研究而证明解为存在. 下面先介绍若干预备知识.

§2 线性问题的预备知识

Ψ 的任一 k 阶微商记为 $D^k\Psi$. 当 $\Psi\in C^k(\bar\Omega)$ 或 $C^{k+\tau}(\bar\Omega)(0<\tau<1)$ 时，记

$$M_{m,k}(\Psi)=\sup_{x\in\bar\Omega}\ \max\{1, d_x^{m+k}\}|D^k\Psi(x)|$$

$$M_{m,k+\tau}(\Psi)=\sup_{x,y\in\bar\Omega}\ \max\{1, d_{xy}^{m+k+\tau}\}\frac{|D^k\Psi(x)-D^k\Psi(y)|}{|x-y|^{\tau}}$$

其中 m 为非负常数，$d_x=d(x, \partial\Omega)$, $d_{xy}=\min(d_x, d_y)$. sup 要理解为对所有的 k 阶微商先取上界. 定义范数:

$$\|\Psi\|_{m,k}=\sum_{j=0}^{k}M_{m,j}(\Psi),\quad \|\Psi\|_{m,k+\tau}=\|\Psi\|_{m,k}+M_{m,k+\tau}(\Psi).$$

定义 $C_{m,k}(\bar\Omega)$ 为由元素 $\{\Psi\in C^k(\bar\Omega)|\|\Psi\|_{m,k}<\infty\}$ 组成的空间，同法定义 $C_{m,k+\tau}(\bar\Omega)$. $C_{m,k+\tau}(\bar\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_{m,k+\tau}$ 下成为 Banach

空间.

考察线性问题

$$
\begin{cases}
\mathscr{L}(\Psi) \doteq \sum b_{ij}(x)\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x_i\partial x_j} + \sum b_i(x)\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_i} + b(x)\Psi = f(x), \\
\left.\dfrac{\partial\Psi}{\partial N}\right|_\Gamma = \Psi_0, \\
\Psi|_\infty = 0.
\end{cases} \tag{3}
$$

引理 1 设有正常数 K, σ 使 $\forall\xi\in \boldsymbol{R}^n$ 有:

$$
\frac{1}{\sigma}|\xi|^2 \leqslant \sum b_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \sigma|\xi|^2,\ \|b_{ij}\|_{0,\tau}\leqslant K,\ \|b_i\|_{1,\tau}\leqslant K,
$$

$$
(1\leqslant i, j\leqslant n), \tag{4}
$$

$\|b\|_{2,\tau}\leqslant K$, $f\in C_{n,\tau}(\bar{\Omega})$, $\Psi_0\in C^{1+\tau}(\Gamma)$

则当 $0<\tau\leqslant\tau_0$ 且 (3) 有解 $\Psi\in C_{n-2,2+\tau}$ 时有:

$$
\|\Psi\|_{n-2,2+\tau}\leqslant C(M_{n-2,0}(\Psi)+\|\Psi_0\|_{C^{1+\tau}(\Gamma)}+\|f\|_{n,\tau}) \tag{5}
$$

其中 C 仅依赖于 n, Ω, K, σ, τ.

证 现在虽是无界情况,内估计仍与 [49] 的 Schauder 估计类似. 近边估计见 [6].

引理 2 如果 (3) 的系数除满足 (4) 之外还满足

$$
\|b_{ij}(x)-b_{ij}(\infty)\|_{\tau,0}\leqslant K,\ \|b_i\|_{1+\tau,0}\leqslant K,\ \|b\|_{2+\tau,0}\leqslant K, \tag{6}
$$

而且 $f\in C_{n+2,0}(\bar{\Omega})\cap C_{n,\tau}(\bar{\Omega})$ 时,则当 $0<\tau\leqslant\tau_0$ 且 (3) 有解 $\Psi\in C_{n-2,2+\tau}(\bar{\Omega})$ 时有

$$
M_{n-2,2+\tau}(\Psi)\leqslant C_1(\|\Psi_0\|_{C^{1+\tau}(\Gamma)}+\|f\|_{n,\tau}+\|f\|_{n+\tau,0}), \tag{7}
$$

C_1 仅依赖于 n, σ, Ω, K, τ.

证 应用引理 1 知 (7) 可由下式导出

$$
M_{n-2,0}(\Psi)\leqslant C_2(\|\Psi_0\|_{C^{1+\tau}(\Gamma)}+\|f\|_{n,\tau}+\|f\|_{n+\tau,0}) \tag{8}
$$

再证 (8) 又可由下式导出:

$$
M_{0,0}(\Psi)\leqslant C_3(\|\Psi_0\|_{C^{1+\tau}(\Gamma)}+\|f\|_{n,\tau}+\|f\|_{n+\tau,0}) \tag{9}
$$

当 (9) 成立时, 不妨设 $\|\Psi_0\|_{C^{1+\tau}(\Gamma)}+\|f\|_{n,\tau}+\|f\|_{n+\tau,0}\leqslant 1$. 则由 (9) 得:

$$
M_{0,0}(\Psi)\leqslant C_3
$$

取 $R=[\sum B_{ij}(\infty)x_ix_j]^{1/2}$, 其中矩阵 $(B_{ij}(\infty))$ 是矩阵 $(b_{ij}(\infty))$

的逆．应用 (4) 与 (6) 得：

$$\frac{1}{\sigma}|x| \leqslant R \leqslant \sigma|x|,$$

$$\sum b_{ij}(\infty)\frac{\partial^2 R^{2-n}}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

$$\mathscr{L}(R^{2-n} - R^{2-n-\tau/2}) = -\frac{\tau}{2}\left(n - 2 + \frac{\tau}{2}\right)R^{-n-\tau/2} + O(R^{-n-\tau})$$

选取 R_0 充分大，满足

$$\{x|R > R_0\} \subset \Omega, \quad R_0^{2-n} - R_0^{2-n-\tau/2} < 1,$$

$$\mathscr{L}\left[R^{2-n} - R^{2-n-\tau/2} \pm \frac{1}{C_3}(R_0^{2-n} - R_0^{2-n-\tau/2})\Psi\right]$$

$$\leqslant -\frac{\tau}{2}\left(n - 2 + \frac{\tau}{2}\right)R^{-n-\tau/2} + O(R^{-n-\tau}) + \frac{|f|}{C_3} < 0,$$

显然 R_0 的选取仅依赖于 Ω, K, τ, n, $\tilde{\sigma}$. 因此由极值原理得

$$|\Psi| \leqslant \frac{C_3}{R_0^{2-n} - R_0^{2-n-\tau/2}}(R^{2-n} - R^{2-n-\tau/2}), \quad (R \geqslant R_0).$$

再结合 $M_{0,0}(\Psi) \leqslant C_3$ 得 $M_{n-2,0}(\Psi) \leqslant C_2$, 即 (8) 成立.

现用反证法来导出 (9) 成立.

如果 (9) 不真，即 $\forall k = 1, 2, \cdots$, 存在 b_{ij}^k, $b_i^k (1 \leqslant i, j \leqslant n)$, b^k, f^k, Ψ_0^k, Ψ^k 满足引理 2 的条件，但

$$M_{0,0}(\Psi^k) > k(\|\Psi_0^k\|_{C^{1+\tau}(\Gamma)} + \|f^k\|_{n,\tau} + \|f^k\|_{n+\tau,0}),$$

不失一般性可设 $M_{0,0}(\Psi^k) = 1$, 故

$$\|\Psi_0^k\|_{C^{1+\tau}(\Gamma)} + \|f^k\|_{n,\tau} + \|f^k\|_{n+\tau,0} \leqslant \frac{1}{k}.$$

仿由 (9) 得出 (8) 的办法得：$M_{n-2,0}(\Psi^k) \leqslant C_1$, 应用引理 1 得 $M_{n-2,2+\tau}(\Psi^k) \leqslant C_1$.

取 $\{k\}$ 的子列 (不妨仍记为 $\{k\}$) 在 $\bar{\Omega}$ 的任何紧子集上，b_{ij}^k, b_i^k, b^k 一致收敛于 b_{ij}^0, b_i^0, b^0; Ψ^k 直到二阶微商一致收敛于 Ψ^0 及其微商. b_{ij}^0, b_i^0, b^0 满足引理 2 的条件，$\|\Psi^0\|_{n-2,2+\tau} \leqslant C_2$, 因此 Ψ^0 满足

$$\begin{cases}\sum b_{ij}^0 \Psi_{x_ix_j}^0 + \sum b_i^0 \Psi_{x_i}^0 + b^0\Psi^0 = 0, \\ \left.\dfrac{\partial \Psi^0}{\partial N}\right|_{\Gamma} = 0, \\ \Psi^0|_\infty = 0.\end{cases}$$

由强极值原理得 $\Psi^0 = 0$.

这与 $M_{0,\theta}(\Psi^k) = 1$, $M_{n-2,0}(\Psi^k) \leqslant C_2$ 相矛盾. 引理 2 得证.

定理 3 在引理 2 的条件下,线性问题 (3) 的解 $\Psi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 为存在唯一,且 $\Psi \in C^{2+\tau}(\bar{\Omega})$, 满足估计式 (7).

证 解的唯一性由极值原理得出. 解的存在性用参数延拓法,即解

$$\begin{cases}[(1-\theta)\mathscr{L}_\infty + \theta\mathscr{L}]\Psi = \theta f, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1), \\ \left.\dfrac{\partial \Psi}{\partial N}\right|_{\Gamma} = \Psi_0, \\ \Psi|_\infty = 0,\end{cases}$$

其中 $\mathscr{L}_\infty = \sum b_{ij}(\infty)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. 当 $\theta = 0$ 时, 经线性变换, 上述定解问题化为 $\Delta\Psi = 0$ 的外斜微商问题,解的存在与唯一性见 [22].

$\theta = 0$ 可解,由引理 2 的估计,对解进行参数延拓,得到 $\theta = 1$ 可解. 定理证毕.

§3 辅助问题的求解

考察辅助问题 (2). 对函数 $\rho(q)$ 在 $q > Q$ 部分作一些修改, 使这样做对 (2) 的解没有影响, 这是因为定解条件 (2) 中有 $\max\limits_{\bar{\Omega}}|\nabla\varphi| = Q$ 的缘故. 修改的原因是使当 $0 \leqslant q < \infty$ 时, 方程为一致椭圆型,这样便于应用 Leray-Schauder 拓扑度定理.

下面是可用的修改方法之一. 记 $(Q + q_c)/2 = \bar{Q}$,

$$s = s(q) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{th}\frac{(\bar{Q} - Q)(2q - Q - \bar{Q})}{2(q - Q)(\bar{Q} - q)}\right],$$

则当 $Q \leqslant q \leqslant \bar{Q}$ 时, $s(q) \in C^\infty$ 且为单调增加,又

$$s(Q)=s'(Q)=s''(Q)=\cdots=s'(\bar{Q})=s''(\bar{Q})=\cdots=0,$$
$$s(\bar{Q})=1.$$

令

$$\bar{\rho}=\begin{cases}\rho, & 0\leqslant q\leqslant Q,\\ \rho(1-s)+\rho^* s, & Q<q<\bar{Q},\\ \rho^*, & \bar{Q}\leqslant q<\infty,\end{cases}$$

其中 $\rho^*=\max\limits_{Q\leqslant q\leqslant\bar{Q}}\rho(q)$，则 $\bar{\rho}(q)$ 合于我们的要求．这是因为：由 $\rho\in C^2(0\leqslant q\leqslant\bar{Q})$ 得出 $\bar{\rho}\in C^2(0\leqslant q<\infty)$；由 $\rho>0(0\leqslant q\leqslant\bar{Q})$ 得出 $\bar{\rho}>0\ (0\leqslant q<\infty)$；由 $\rho+\rho' q>0\ (0\leqslant q\leqslant\bar{Q})$ 得出 $\bar{\rho}+\bar{\rho}' q=(\rho+\rho' q)(1-s)+\rho^* s+q(\rho^*-\rho)s'\geqslant\min\{\rho+\rho' q,\rho^*\}>0\ (Q\leqslant q\leqslant\bar{Q})$，因此存在正常数$K$使 $\bar{\rho}+\bar{\rho}' q\geqslant K>0$ $(0\leqslant q<\infty)$．因而

$$\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bar{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\equiv\sum\bar{a}_{ij}(D\varphi)\varphi_{x_i x_j}=0$$

特征值为 $\lambda_1=\bar{\rho}+\bar{\rho}' q$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\bar{\rho}$，故有正常数 $\sigma=\sigma(Q)$ 使

$$\sigma|\xi|^2\leqslant\sum\bar{a}_{ij}(D\varphi)\xi_i\xi_j\leqslant\frac{1}{\sigma}|\xi|^2,\quad\forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,\ \forall q\in[0,\infty),$$

为了记号简单，$\bar{\rho}$，$\bar{a}_{ij}$ 简记为 ρ，a_{ij}．因此

$$\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=\sum a_{ij}(D\varphi)\varphi_{x_i x_j}=0,$$

于 $0\leqslant q<\infty$ 为一致椭圆型，即满足条件

$$\sigma|\xi|^2\leqslant\sum a_{ij}(D\varphi)\xi_i\xi_j\leqslant\frac{1}{\sigma}|\xi|^2,\quad\forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,\ \forall q\in[0,\infty).$$

设函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi\in C^{1+\tau}(\bar{\Omega})$，$D\varphi(\infty)=(U,0,\cdots,0)$，
$[\varphi(x)-Ux_1]_{x=\infty}=0$，$|D\varphi(x)-D\varphi(\infty)|\leqslant C_1 d_x^{-\tau}$，
$|D\varphi(x)-D\varphi(y)|\leqslant C_2\min(1,d_{xy}^{-\tau})|x-y|^\tau$，

其中 $\tau=\tau(Q,\Gamma)\leqslant\tau_0$，$\tau_0$ 是 $\Gamma\in C^{2+\tau_0}$ 中的常数．τ 的具体数值将于下面取定．设函数 $\varphi(x)$ 的范数由式子

$$\|\varphi\|=|U|+\max_{\bar{\Omega}}|\varphi-Ux_1|+\inf C_1+\inf C_2$$

定出．可证 $\|\varphi\|$ 满足范数的所有条件，而由此所有 φ 的集合 $\{\varphi\}$ 成为 Banach 空间 E.

设 $\varphi\in E$, 求解

$$\begin{cases}\sum a_{ij}(D\varphi)\Psi_{x_ix_j}=0,\\ \left.\dfrac{\partial\Psi}{\partial N}\right|_\Gamma=-\cos(N,x_1)|_\Gamma,\\ \Psi|_\infty=0,\end{cases}\tag{10}$$

由定理 3，知解 Ψ 为存在、唯一，且 $\Psi\in C_{n-2,2+\tau}(\Omega)$, 特别有 $\nabla\Psi=O(d_x^{1-n})$, 因此 $\max\limits_{\Omega}|\nabla[\Psi(x)+x_1]|$ 存在，令

$$\Phi(x)=\frac{\theta Q[\Psi(x)+x_1]}{\max\limits_{\Omega}|\nabla[\Psi(x)+x_1]|},\quad(0\leqslant\theta\leqslant1),$$

则 Φ 满足

$$\sum a_{ij}(D\varphi)\Phi_{x_ix_j}=0,$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right|_\Gamma=0,$$

$$\max_{\Omega}|\nabla\Phi|=\theta Q,$$

$$\left.\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\right|_\infty=(1,0,\cdots,0).$$

由 $\Psi\in C_{n-2,2+\tau}$ 特别得 $\Psi\in E$，因此 $\Phi\in E$．因而 $\Phi=T(\varphi,\theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant1)$ 是映 E 入 E 的线性映象．我们要证明这一线性映象当 $0\leqslant\theta\leqslant1$ 均有不动点．$\theta=1$ 时不动点就是我们所要求的辅助问题的解.

验证 Leray-Schauder 定理的诸条件．由定理 3 得到

$$\|\Psi\|_{n-2,2+\tau}\leqslant K\|\varphi\|_E,$$

因此 T 的象集为紧．要证 T 对 φ 连续，即设 $\varphi_k\in E$, $\varphi\in E$, $\|\varphi_k-\varphi\|_E\to0\ (k\to\infty)$，去证 $\|\Phi_k-\Phi\|_E\to0$．如果结论不真，即有子列 $\{k'\}$ 与正数 $\delta>0$ 使 $\|\Phi_{k'}-\Phi\|_E\geqslant\delta$, 但

$$\|\Psi_{k'}\|_{n+2,2+\tau}\leqslant K\|\varphi_{k'}\|_E\leqslant K(\|\varphi\|_E+1),$$

故 $\{\Psi_{k'}\}$ 在 $\|\cdot\|_{n-2,2+\tau/2}$ 中为紧，即有 Ψ_* 及 $\{k'\}$ 的子列 $\{k''\}$ 使

$$\|\Psi_{k''}-\Psi_*\|_{n-2,2+\tau/2}\to0,\quad(k''\to\infty),$$

由 $\sum a_{ij}(D\varphi_{k''})\dfrac{\partial^2\Psi_{k''}}{\partial x_i\partial x_j}=0$ 取极限得 $\sum a_{ij}(D\varphi)\dfrac{\partial^2\Psi_*}{\partial x_i\partial x_j}=0$，同法得 $\left.\dfrac{\partial\Psi_*}{\partial N}\right|_\Gamma=-\cos(N,x_1)$，$\Psi_*|_\infty=0$．由定解问题(10)的解为唯一得到 $\Psi_*=\Psi$．由 $\|\Psi_{k''}-\Psi\|_{n-2,2+\tau/2}\to 0$ 及 $D\Phi(\infty)=\left(\dfrac{\theta Q}{\max\limits_{\Omega}|\nabla[\Psi(x)+x_1]|},0,\cdots,0\right)$ 推出 $\|\Phi_{k''}-\Phi\|_E\to 0\ (k''\to\infty)$，得到矛盾．

$T(\varphi,\theta)$ 是 θ 的线性函数，故对 θ 为一致连续．

当 $\theta=0$ 时，$\Phi(x)=0$，因此 $\varphi=T(\varphi,0)$ 只有 $\varphi=0$ 的解，即 $\theta=0$ 时解的指数为 ±1．

再证明 $\varphi-T(\varphi,\theta)=0$ 的解在 E 中为有界，即要证 $\|\varphi\|_E=|U|+\max\limits_{\Omega}|\varphi-Ux_1|+\inf C_1+\inf C_2$ 为有界．由于 $U=D\varphi(\infty)$，$0\leqslant U\leqslant\max\limits_{\Omega}|\nabla\varphi|=\theta Q\leqslant Q(0\leqslant\theta\leqslant1)$，即 U 为有界．下面利用解的内估计与近边估计证明 $\inf C_2$ 为有界．用 ∞ 附近的估计证明 $\inf C_1$ 与 $\varphi-Ux_1$ 为有界．

利用[5]中关于 Hölder 条件估计的结果(它基本上是[49]中含 t 的估计的特殊情况)，设 $u(x)\in W^{1,m}(\Omega)\ (1<m\leqslant n)$ 且 $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{\Omega}|u|=M$，记

$$A_{k,\rho}=\{x\in\Omega\cap|x-x_0|<\rho|u(x)>k\},$$
$$B_{k,\rho}=\{x\in\Omega\cap|x-x_0|<\rho|u(x)<k\},$$

其中 x_0 为固定常数．称 $u(x)\in\mathscr{B}_m(\Omega,M,\gamma,\delta,1/q)$，如果 $\forall x_0\in\bar\Omega$，$\forall\rho>0$，$\forall\sigma\in(0,1)$ 有：

$$\int_{A_{k,(1-\sigma)\rho}}|\nabla u|^m dx\leqslant\gamma\left[\frac{1}{\sigma^m\rho^m(1-n/q)}\max_{A_{k,\rho}}\{[u(x)-k]^m+1\}\right]\mathrm{mes}^{1-m/q}A_{k,\rho},$$

$$\forall k\geqslant\max\{\max_{K_\rho\cap\Omega}u(x)-\delta,\ \max_{K_\rho\cap\partial\Omega}u(x)\},$$

$$K_\rho=\{x\,|\,|x-x_0|<\rho\}$$

$$\int_{B_{k,(1-\sigma)\rho}} |\nabla u|^m dx \leqslant \gamma \left[\frac{1}{\sigma^m \rho^m (1-n/q)} \max_{B_{k,\rho}} \{[k - u(x)]^m + 1\}\right] \mathrm{mes}^{1-m/q} B_{k,\rho},$$

$$\forall k \leqslant \min\{\min_{K_\rho \cap \partial\Omega} u(x) + \delta, \min_{K_\rho \cap \partial\Omega} u(x)\}.$$

[5] 中证明，当 $u(x) \in \mathscr{B}_m(\Omega, M, \gamma, \delta, 1/q)$ 时，则 u 在 Ω 内部及近边均满足 Hölder 条件. Ω 内 Hölder 条件的指数仅与 m, M, γ, δ, q 及内闭部分到 $\partial\Omega$ 的距离有关. 近边满足 Hölder 条件还要求 $\partial\Omega$ 满足外锥条件及 $u|_{\partial\Omega}$ 满足 Hölder 条件，近边 Hölder 条件的指数、系数再与这后两者中的常数有关.

$\Phi = T(\varphi, \theta)$ 的不动点为 $\varphi \in E$ 满足 $\varphi \in C_{n-2,2+\tau}(\Omega)$ 且

$$\begin{cases} \sum a_{ij}\varphi_{x_ix_j} = \sum \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial N}\Big|_\Gamma = 0, \\ \nabla\varphi|_\infty = (U, 0, \cdots, 0), \\ \max\limits_{\Omega} |\nabla\varphi| = q \leqslant Q. \end{cases}$$

应用线性方程的 Schauder 估计得

$$\varphi \in C^{3+\tau}(\Omega) \cap C^{2+\tau}(\bar{\Omega}).$$

方程对 x_l 微分，记 $\partial\varphi / \partial x_l = u_l$，简记为 u 得

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_l} \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\rho'}{q} \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_l}\right) = \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right).$$

$$a_{ij} = \rho\delta_{ij} + \frac{\rho'}{q} \varphi_{x_i}\varphi_{x_j}.$$

设 $\{x \mid |x - x_0| \leqslant \mu\} \subset \Omega$. 记 $A_{\eta,\mu} = \{x \in \Omega \mid |x - x_0| < \mu, u(x) > \eta\}$，$\zeta(x)$ 为 $|x-x_0| < \mu$ 中的截断函数. 上式乘 $\zeta^2(x)(u-\eta)^+$ 积分得

$$\int_{A_{\eta,\mu}} \zeta^2 |\nabla u|^2 dx \leqslant K \int_{A_{\eta,\mu}} (u-\eta)^2 |\nabla\zeta|^2 dx.$$

取 $\zeta(x)$ 于 $|x-x_0|\leqslant(1-\theta)\mu$ 中为 1 $(0<\theta<1)$，$|x-x_0|<\mu$ 外为 0，中间为径向线性连结，则由上式得：

$$\int_{A_{\eta,(1-\theta)\mu}}|\nabla u|^2dx\leqslant K\,\mathrm{mes}\,A_{\eta,\mu}\frac{1}{(\theta\mu)^2}\max_{x\in A_{\eta,\mu}}[u(x)-\eta]^2,$$

同法得到 $B_{\eta,(1-\theta)\mu}$ 上的类似估计，因此

$$u\in\mathscr{B}_2(|x-x_0|<\mu,\,Q,\,K,\,\infty,\,\infty),$$

故得：

$$|u(x)-u(y)|\leqslant Kd_{xy}^{-\tau_1}|x-y|^{\tau_1}.$$

但[5]中仅证明当 $|x-y|\leqslant K_1d_{xy}$ 时上式成立。当 $|x-y|\geqslant K_1d_{xy}$ 时上式也是成立的。这是因为：

$$|u(x)-u(y)|\leqslant|u(x)|+|u(y)|\leqslant 2Q$$

$$\leqslant\frac{2Q}{K_1^{\tau_1}}d_{xy}^{-\tau_1}|x-y|^{\tau_1}.$$

再看近边估计. 由于 $\Gamma\in C^{2+\tau_0}$，Γ 的小片有参数表示

$$x_i=x_i(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\in C^{2+\tau_0},$$

小片内取点 $P_0\in\Gamma$，适当选取变量 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，使得在以 P_0 为中心的小球 ω 内有 $\xi_i=\xi_i(x_1,\cdots,x_n)\in C^{2+\tau_0}$，在 P_0 点 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 作成单位正交坐标系，且在 $\omega\cap\Gamma$ 上 ξ_n 重合于法线方向. 具体的选取方法为：先取 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}$ 使它们在 P_0 作成单位正交坐标系. 由于

$$\cos(N,x_i)=\lambda_i(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})\in C^{1+\tau_0}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

因此直接取 $x_i=x_i(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})+\xi_n\lambda_i(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$ 仅有 $x_i\in C^{1+\tau_0}$ 不够，取

$$x_i=x_i(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})+\xi_n^{2-n}\int_{\xi_1}^{\xi_1+\xi_n}\cdots\int_{\xi_{n-1}}^{\xi_{n-1}+\xi_n}\lambda_i(\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1})d\sigma_1\cdots d\sigma_{n-1},$$

求反函数 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 就合于我们的要求. 记

$$\alpha_{jk}=\sum\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i},$$

则有

$$\alpha_{jk}|_{P_0}=\delta_{jk},\quad(j,k=1,\cdots,n),$$

$$\alpha_{jn}|_{\omega\cap\Gamma}=0,\quad (j=1,\cdots,n-1),$$

因此

$$q^2=\sum u_{x_i}^2=\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}=\sum\alpha_{jk}\bar{u}_j\bar{u}_k,$$

$$\left(\bar{u}_j=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_j}\right).$$

$\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=0$ 是变分问题 $\delta\iint\rho q dq dx=0$ 的 Euler 方程，这是因为

$$0=\delta\iint\rho q dq dx=\int\rho q\delta q dx=\sum\int\rho\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx$$

$$=-\sum\int\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\delta\varphi dx$$

经坐标变换成为

$$\delta\iint\rho q dq J d\xi=0,\quad J=\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(\xi_1,\cdots,\xi_n)},$$

或

$$\sum\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\sum\rho\alpha_{ij}\bar{u}_jJ\right)=0.$$

上式对 ξ_l 微分得:

$$\sum\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\sum J\beta_{ij}\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial\xi_j}+\beta_i\right)=0,$$

其中

$$\beta_{ij}=\rho\alpha_{ij}+\frac{\rho'}{q}\sum\alpha_{ik}\alpha_{jm}\bar{u}_k\bar{u}_m,$$

$$\beta_i=\sum\frac{\partial}{\partial\xi_l}(J\alpha_{ij})\rho\bar{u}_j+\frac{J\rho'}{2q}\sum\alpha_{ij}\frac{\partial\alpha_{km}}{\partial\xi_l}\bar{u}_j\bar{u}_k\bar{u}_m,$$

因此,

$$\beta_{ij}|_{P_0}=\left[\rho\delta_{ij}+\frac{\rho'}{q}\bar{u}_i\bar{u}_j\right]_{P_0}.$$

当小球半径适当小时，有:

$$\frac{\sigma}{2}|\lambda|^2\leqslant\sum\beta_{ij}\lambda_i\lambda_j\leqslant\frac{2}{\sigma}|\lambda|^2,\quad\forall\lambda\in\boldsymbol{R}^n$$

ω, $\omega\cap\Omega$, $\omega\cap\Gamma$ 的象分别记为 $\bar{\omega}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{\Gamma}$, 则 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right|_{\Gamma}=0$化为$\bar{u}_n|_{\bar{\Gamma}}=0$.

上面 $\bar{u}_l$ 的方程乘 $\zeta^2(\bar{u}_l-\eta)^+$, 其中 ζ 为以 ξ_0 为中心的截断函数,但设 ζ 的支集在 $\bar{\omega}$ 内,且在 $l=n$ 时,特别限定常数 $\eta\geqslant 0$, 经分部积分得:

$$\sum\int_{\bar{\omega}\cap\{\bar{u}_l>\eta\}}\left(\sum J\beta_{ij}\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial\xi_j}+\beta_i\right)\frac{\partial}{\partial\xi_i}[\zeta^2(\bar{u}_l-\eta)]d\xi=0,$$

上式中不出现面积分的原因是: 当 $i\neq n$ 时,积分与平面片平行, $\zeta=0$; 当 $i=n$, $l=n$ 时 $[\bar{u}_n-\eta]^+_{\bar{\Gamma}}=(-\eta)^+=0$; 当 $i=n$, $l\neq n$ 时,如果 $j=n$, 则 $\left.\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial\xi_n}\right|_{\bar{\Gamma}}=\left.\frac{\partial\bar{u}_n}{\partial\xi_l}\right|_{\bar{\Gamma}}=0$, 导出 $J\beta_{nn}\left.\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial\xi_n}\right|_{\bar{\Gamma}}=0$; 如果 $j\neq n$, 则 $\alpha_{jn}|_{\bar{\Gamma}}=0$, $\beta_{jn}|_{\bar{\Gamma}}=\left(\rho\alpha_{nj}+\frac{\rho'}{q}\sum\alpha_{nk}\alpha_{jm}\bar{u}_k\bar{u}_m\right)_{\bar{\Gamma}}=\left(\frac{\rho'}{q}\alpha_{nn}\bar{u}_n\sum\alpha_{jm}\bar{u}_m\right)_{\bar{\Gamma}}=0$, 因此有 $\sum J\beta_{nj}\left.\frac{\partial\bar{u}_l}{\partial\xi_j}\right|_{\bar{\Gamma}}=0$; 同法得 $b_n|_{\bar{\Gamma}}=0$ $(i=n,\ l\neq n)$.

拓广 $\bar{u}_l$ 的定义到 $\bar{\omega}\backslash\bar{\Omega}$ 为

$$\bar{u}_l(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\begin{cases}\bar{u}_l(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},-\xi_n), & (l\neq n),\\ 0, & (l=n).\end{cases}$$

则注意到 $\bar{u}_n|_{\bar{\Gamma}}=0$ 得到 $\bar{u}_l\in W_2^1(\bar{\omega})$. 由上式积分得到

$$\int_{A_{\eta,(1-\theta)\mu}}|\nabla\bar{u}_l|^2d\xi\leqslant K\operatorname{mes}A_{\eta,\mu}\left\{\frac{1}{(\theta\mu)^2}\max_{\xi\in A_{\eta,\mu}}\{[\bar{u}_l(\xi)-\eta]^2+1\}\right\},\quad(0<\theta<1),$$

$l\neq n$ 时, η 任意; $l=n$ 时, $\eta\geqslant 0$.

同法可得到 $B_{\eta,(1-\theta)\mu}$ 上的估计. 因此

$$\bar{u}_l\in\mathscr{B}_2(\bar{\omega},Q,K,\infty,\infty),\quad l=1,2,\cdots,n-1,$$
$$\bar{u}_n\in\mathscr{B}_2(\bar{\omega},Q,K,0,\infty),$$

由 [5] 得,存在 $\tau_2=\tau_2(Q,\Gamma)>0$ 使下面近边估计成立

$$|u(x)-u(y)|\leqslant K|x-y|^{\tau_2},\quad(u=u_l,\ l=1,2,\cdots,n).$$

再考察 ∞ 附近的估计. $u_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 满足方程

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0.$$

记 $K_1 = \sup\limits_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ x\in\Omega}}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_k}\right|$. 由 a_{ij} 的表示式及 q 有界易知，K_1 为常数.

做 $x_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 的常系数线性变换（为了简化记号，变换后自变量仍记为 x，系数 a_{ij} 仍记为 a_{ij}）使变换后有 $a_{ij}(\infty)=\delta_{ij}\ (1\leqslant i,\ j\leqslant n)$. 则有 $\sup\limits_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ x\in\Omega}}\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u_k}\right| = K_2$. 再令

$$u_k(x) - u_k(\infty) = v_k(x),$$

则 v_k 满足

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) = 0,\quad v_k(\infty) = 0\ \ (1\leqslant k\leqslant n).$$

记

$$V = \sum_1^n v_l^2 \pm v_k - \eta\left(\frac{r_0}{r}\right)^\lambda,$$

其中 η, r_0, λ 为正常数，$r=|x|$, $0<\lambda<n-2$, 则

$$\begin{aligned}
\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j}\right) &= \sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}\left(2\sum u_l\frac{\partial u_l}{\partial x_j} - \eta r_0^\lambda\frac{\partial r^{-\lambda}}{\partial x_j}\right)\right]\\
&= 2\sum a_{ij}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j} - \eta r_0^\lambda\sum\left(a_{ij}\frac{\partial^2 r^{-\lambda}}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial r^{-\lambda}}{\partial x_j}\right)\\
&\geqslant [2+o(1)]\sum\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)^2 + \eta r_0^\lambda[1+o(1)]\lambda(n-2\\
&\quad -\lambda)r^{-\lambda-2} - \eta r_0^\lambda K_2 r^{-\lambda-1}\sum\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right|\\
&\geqslant \frac{\eta}{2}\lambda(n-2-\lambda)r_0^\lambda r^{-\lambda-2} - \eta^2K_2^2r_0^{2\lambda}r^{-2\lambda-2}\\
&= \frac{\eta r_0^\lambda}{2r^{\lambda+2}}\left[\lambda(n-2-\lambda) - 2\eta K_2^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^\lambda\right] > 0,
\end{aligned}$$

当我们选取 $\eta = \frac{\lambda(n-2-\lambda)}{2K_2^2}$, r_0 相当大，则当 $r>0$ 时上式成立. 因此 V 不在 $r_0<r<\infty$ 取到最大，又 $V(\infty)=0$

$$V|_{r=r_0} \leqslant \sum v_l^2 + \left(\sum v_l^2\right)^{1/2} - \eta \leqslant 0,$$

当取 r_0 很大时,因此 $V \leqslant 0$ 于 $r_0 \leqslant r \leqslant \infty$.

$$|v_k| \leqslant \eta\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\lambda} = \eta_1 r^{-\lambda}, \quad (1 \leqslant k \leqslant n,\ r \geqslant r_0). \qquad (11)$$

u 在 ∞ 点满足 Hölder 条件是 (11) 的特殊情况. 但 (11) 中 η_1 与函数 u 有关,即在 ∞ 点 u 的 Hölder 系数与 u 有关,这仍不符合估计的要求.

设原点在 Γ 的内部. 记 $R = \operatorname{diam}\ \Omega$, $\bar{R}$ 为大的正数. 令

$$\zeta(x) = \begin{cases} \dfrac{|x| - R}{R}, & \text{当 } R \leqslant |x| \leqslant 2R, \\ 1, & 2R < |x| < \dfrac{1}{2}\bar{R}, \\ \dfrac{2(\bar{R} - |x|)}{\bar{R}}, & \dfrac{1}{2}\bar{R} \leqslant |x| \leqslant \bar{R}. \end{cases}$$

$\sum \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial v}{\partial x_j}\right) = 0$ 乘以 $\zeta^2 v$, 分部积分并应用 (11) 得:

$$\int \zeta^2 |\nabla v|^2 dx \leqslant K_1 \int v^2 |\nabla \zeta|^2 dx \leqslant K_1 \int_{R \leqslant |x| \leqslant 2R} v^2 |\nabla \zeta|^2 dx$$
$$+ K_1 \eta_1^2 \bar{R}^{-2} \int_{\bar{R}/2}^{\bar{R}} r^{-2\lambda+n-1} dr \leqslant 2^n K_1 Q^2 R_1^{n-2} + K_1 \eta_1^2 2^{2\lambda} \bar{R}^{n-2-2\lambda},$$

取 $\lambda = n - 2 + 1/3$, 则当 $n \geqslant 3$ 时有 $n - 2 - 2\lambda = 8/3 - n < 0$. 因此令 $\bar{R} \to \infty$ 得到

$$\int_{2R}^{\infty} |\nabla v|^2 dx \leqslant 2^n K_1 Q^2 R^{n-2} = K_2.$$

点 x 关于 $|x| = 1$ 的反演点记为 X, 则上式化为

$$\int_{|X| \leqslant 1/2R} |X|^{4-2n} |\nabla_X u|^2 dX \leqslant K_2.$$

因而当 ρ 小时有:

$$\int_{|X| \leqslant \rho} |\nabla_X v|^2 dX \leqslant K_2 \rho^{2n-4}, \quad \int_{|X| \leqslant \rho} |\nabla_X v| dX \leqslant K_3 \rho^{2n-2}. \quad (12)$$

当 $|x^0|$ 大时,由

$$\int_{|x-x^0| \leqslant |x^0|/2} \zeta^2 |\nabla v|^2 dx \leqslant K_4 \int_{|x-x^0| \leqslant |x^0|/2} [v - v(x^0)]^2 |\nabla \zeta|^2 dx$$

及内估计

$$|v(x) - v(x^0)| \leqslant K d_{xx'}^{-\tau_1} |x - x^0|^{\tau_1},$$

取通常的 $\zeta(x)$ 得:

$$\int_{|x-x^0|\leqslant \kappa/4} |\nabla v|^2 dx \leqslant K_5 |x^0|^{-\tau_1} \kappa^{n-2+\tau_1}, \quad \kappa \leqslant |x^0|/4 \text{ 时成立,}$$

经反演变换得:

$$\int_{|X-X^0|\leqslant \xi} |\nabla_X v|^2 dX \leqslant K_6 |X^0|^{-\tau_1} \xi^{n-2+\tau_1}, \quad \xi \leqslant \frac{4}{5}|X^0| \text{ 时成立.}$$

故有

$$\int_{|X-X^0|\leqslant \xi} |\nabla_X v| dX \leqslant K_7 |X^0|^{-\tau_1/2} \xi^{n-1+\tau_1/2}, \quad \xi \leqslant \frac{4}{5}|X^0|, \tag{13}$$

记 $\sigma(X^0, \xi) = \int_{|X-X^0|\leqslant \xi} |\nabla_X v| dX$, 当 $|X^0| = \rho$ 时, 由 (12)、(13) 得:

$$\sigma(X^0, \xi) \leqslant \begin{cases} K_7 \rho^{-\tau_1/2} \xi^{n-1+\tau_1/2}, & \xi \leqslant \rho^{\frac{2n-2+\tau_1/2}{n-1+\tau_1/2}}, \\ K_3 \rho^{2n-2}, & \rho^{\frac{2n-2+\tau_1/2}{n-1+\tau_1/2}} \leqslant \xi \leqslant 3\rho. \end{cases} \tag{14}$$

应用 Соболев 分解式并结合 (14) 得:

$$\left| v(X^0) - \int_{K_{2\rho}} \zeta_0(z) v(z) dz \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{K_{2\rho}} \frac{\omega_i(X^0, z)}{|X^0 - z|^{n-1}} D_i v(z) dz \right|$$
$$\leqslant K_8 \int_0^{3\rho} \xi^{-n+1} \sigma'(X^0, \xi) d\xi = K_8 \Big[\xi^{-n+1} \sigma(X^0, \xi) \Big|_0^{3\rho}$$
$$+ (n-1) \int_0^{3\rho} \xi^{-n} \sigma(X^0, \xi) d\xi \Big] \leqslant K_9 \rho^{\frac{(n-1)\tau_1}{2n-2+\tau_1}},$$

应用 (12) 得:

$$\left| \int_{K_{2\rho}} \zeta_0(z) v(z) dz \right| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{K_{2\rho}} \frac{\omega_i(0, z)}{|z|^{n-1}} D_i v(z) dz \right|$$
$$\leqslant K_{10} \int_0^{2\rho} \xi^{-n+1} \sigma'(0, \xi) d\xi = K_{10} \Big[\xi^{-n+1} \sigma(0, \xi) \Big|_0^{2\rho}$$
$$+ (n-1) \int_0^{2\rho} \xi^{-n} \sigma(0, \xi) d\xi \Big] \leqslant K_{11} \rho^{n-1}.$$

上面两式结合得:

$$|v(X^0)| \leqslant K_{12} |X^0|^{\frac{(n-1)\tau_1}{2n-2+\tau_1}}$$

即

$$|u(x) - u(\infty)| = |v(x)| \leqslant K_{12} |x|^{-\frac{(n-1)\tau_1}{2n-2+\tau_1}}.$$

取 $\tau = \min\left(\tau_1, \tau_2, \dfrac{(n-1)\tau_1}{2n-2+\tau_1}\right)$, 则上面估计, 结合内估

计、近边估计成为：

$$|D\varphi(x)-D\varphi(\infty)|\leqslant K_{13}d_x^{-\tau},$$
$$|D\varphi(x)-D\varphi(y)|\leqslant K_{14}\min(1,d_{xy}^{-\tau})|x-y|^{\tau},$$

因此 $\inf C_1\leqslant K_{13}$, $\inf C_2\leqslant K_{14}$ 均为有界.

又因不动点 $\varphi(x)=\dfrac{\theta Q[\Psi(x)+x_1]}{\max\limits_{\bar{\Omega}}|\nabla[\Psi(x)+x_1]|}$, $\Psi(x)$ 是 (10) 的解且 $\Psi(x)\in C_{n-2,2+\tau}(\bar{\Omega})$. 由于 $|D\varphi(x)-D\varphi(\infty)|\leqslant C_1d_x^{-\tau}$, 我们得到：

$$\nabla\varphi|_\infty=\left(\frac{\theta Q}{\max\limits_{\Omega}|\nabla[\Psi(x)+x_1]|},0,\cdots,0\right)=(U,0,\cdots,0).$$

由 $[\Psi(x)+x_1]_\infty=(1,0,\cdots,0)$ 得 $\max\limits_{\Omega}|\nabla[\Psi(x)+x_1]|\geqslant 1$,

$$|\varphi-U_{x_1}|=\left|\frac{\theta Q\Psi(x)}{\max\limits_{\bar{\Omega}}|\nabla[\Psi(x)+x_1]|}\right|\leqslant Q|\Psi(x)|,$$

由 $\Psi\in C_{n-2,2+\tau}(\bar{\Omega})$ 有：$|\Psi(x)|\leqslant K_{15}d_x^{2-n}$, 因而 $|\Psi(x)|$ 于 $\bar{\Omega}$ 为有界，导出 $\max\limits_{\bar{\Omega}}|\varphi-U_{x_1}|$ 为有界.

因而 $\varphi-T(\varphi,\theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant 1)$ 的不动点为有界. 把映象的区域稍取大一些，则在区域边界上没有不动点.

所有 Leray-Schauder 拓扑度定理的条件均满足，故得：

定理 4 辅助问题 (2) 的解 $\varphi\in C^{2+\tau}(\Omega)\cap C^{1+\tau}(\bar{\Omega})$ 为存在.

§4 绕流问题的求解及解的简单性质

定理 5 绕流问题 (1) 在亚音速范围 (即 $\max\limits_{\Omega}|\nabla\varphi|<q_c$) 内解 $\varphi\in C^{2+\tau}(\Omega)\cap C^{1+\tau}(\bar{\Omega})$ 除了一个常数而外为唯一.

证 由前面不动点研究知 $\varphi-Ux_1$ 在 ∞ 附近为连续，故可取定 $[\varphi-Ux_1]_{x=\infty}=0$.

由于方程可写为 $\sum a_{ij}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}=0$, 因此解 $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ 之差 $\bar{\varphi}=\varphi^{(2)}-\varphi^{(1)}$ 满足下面方程

$$\sum a_{ij}(u_1^{(2)},\cdots,u_n^{(2)})\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x_i\partial x_j}+\sum b_k\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x_k}=0,$$

其中

$$u_i^{(m)}=\frac{\partial\varphi^{(m)}}{\partial x_i},\quad (m=1,2;\ i=1,2,\cdots,n),$$

$$b_k=\sum\frac{1}{u_k^{(2)}-u_k^{(2)}}[a_{ij}(u_1^{(2)},\cdots,u_k^{(2)},u_{k+1}^{(1)},\cdots,u_n^{(1)})$$

$$-a_{ij}(u_1^{(2)},\cdots,u_{k-1}^{(2)},u_k^{(1)},\cdots,u_n^{(1)})]\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial x_i\partial x_j}.$$

又

$$\left.\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial N}\right|_\Gamma=0,\quad \bar{\varphi}(\infty)=0.$$

因此当 $\bar{\varphi}$ 不为常数时，则它不在 $\bar{\Omega}$ 中取到正最大与负最小，结合 $\bar{\varphi}(\infty)=0$ 得到 $\bar{\varphi}=0$，定理证毕.

定理 6 存在正常数 q_c^{**}，使得当 $0\leqslant U\leqslant q_c^{**}$ 时绕流问题的解在亚音速范围内存在（它为唯一见定理 5），且由此定出函数 $Q(U)\in C[0,q_c^{**})$，又 $\lim\limits_{U\to q_c-0}Q(U)=q_c$.

证 由于上述绕流问题与辅助问题的解各由一个常数 U 与 Q 决定，所以可简称对应于 U 的解和对应于 Q 的解，或对应于 (U,Q) 的解. 也可定出函数 $Q(U)$ 与 $U(Q)$，其中 $U(Q)$ 一般为多值函数（由于未证明辅助问题解为唯一），而 $Q(U)$ 则在亚音速范围内最多只有一个值.

固定 $Q_0<q_c$，我们要证明 $\forall U$ 使 $0<U\leqslant\inf U(Q_0)$ 必然有对应的一个解使 $0<Q(U)\leqslant Q_0$. 用反证法，设这一断言不真，即有 $\tilde{U}$ 使 $0<\tilde{U}\leqslant\inf U(Q_0)$，但无对应的 $0<Q\leqslant Q_0$ 的解. 如有解列 (U_i,Q_i) 使 $\lim\limits_{i\to\infty}U_i=U$，$\sup\limits_i Q_i\leqslant Q_0$，则解列 $\{\varphi_i\}$ 于 $\|\cdot\|_{n-2,2+r/2}$ 为紧，有子列 $\{\varphi_{ij}\}$ 收敛于 $\tilde{\varphi}$，因而 $\lim Q_{ij}\to\tilde{Q}\leqslant Q_0$，即 $\tilde{\varphi}$ 为对应于 $(\tilde{U},\tilde{Q})$ 的解，得到矛盾. 由于上述解列不存在得到，存在 $\bar{\varepsilon}>0$，使 $(\tilde{U}-\bar{\varepsilon},\tilde{U})$ 中无对应的 $0<Q\leqslant Q_0$ 的解（预设 $\bar{\varepsilon}<\tilde{U}$），应用 Leray-Schauder 定理于空间 E 的 $-\infty<U<$

$\tilde{U}-\tilde{\varepsilon}/2$ 部分得到：$\forall Q$ 使 $0<Q\leqslant Q_0$ 于 $0<U\leqslant\tilde{U}-\tilde{\varepsilon}/2$ 至少有一解，因此 $\inf U(Q_0)\leqslant\tilde{U}-\tilde{\varepsilon}/2<\tilde{U}$，矛盾.

再证 $Q(U)\in C[0,\inf U(Q_0)]$. $\forall U_i$ 使当 $i\to\infty$，$U_i\to\tilde{U}\leqslant\inf U(Q_0)$. 由绕流问题于亚音速范围内解为唯一得到 $Q(U_i)\leqslant Q_0$，如有子列 $Q(U_{i_j})\to\bar{Q}\neq Q(\tilde{U})$，则由解列紧性知有对应于 $(\tilde{U},\bar{Q})$ 的解，与解的唯一性矛盾. 因此，$Q(U_i)\to Q(\tilde{U})(i\to\infty)$，这就证明了 $Q(U)\in C[0,\inf U(Q_0)]$.

记 $\sup\limits_{Q<q_c}\inf U(Q)=q_c^\infty$. 由于 $\inf U(Q)\leqslant Q$，得到 q_c^∞ 为有限数 $(q_c^\infty<q_c)$，且 $Q(U)\in C[0,q_c^\infty)$.

由 $\sup\limits_{U\leqslant\inf U(Q_0)}Q(U)=Q_0$，$\forall Q_0<q_c$. 令 $Q_0\to q_c-0$ 得

$$\sup_{U<q_c^\infty}Q(U)=q_c.$$

如果

$$\lim_{U\to q_c^\infty-0}\inf Q(U)=\tilde{Q}<q_c,$$

则连续函数 $Q(U)$ 的值当 $U\to q_c^\infty-0$ 时，在 $[\tilde{Q},q_c]$ 间作有限振动，因此 $[\tilde{Q},q_c]$ 间任一点都是 $Q(U)$ 当 $U\to q_c^\infty-0$ 时的极限点，因此有 $U_m\to q_c^\infty-0$，$U'_m\to q_c^\infty-0$ 使 $Q(U_m)\to\tilde{Q}$，$Q(U'_m)\to(\tilde{Q}+q_c)/2(m\to\infty)$. 对应解列 $\{\varphi_m\}$，$\{\varphi'_m\}$ 的极限函数 φ，φ' 分别是对应于 $(q_c^\infty,\tilde{Q})$，$(q_c^\infty,(\tilde{Q}+q_c^\infty)/2)$ 的解，与亚音速范围内解为唯一相矛盾. 定理证毕.

§5 绕流问题解的其它性质

前面的讨论，一直限定无穷远处来流为 x_1 轴正方向，今去掉这一限制成为

$$\begin{cases}\sum\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=0,\\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial N}\right|_\Gamma=0,\\ \nabla\varphi|_{x=\infty}=u^\infty,\end{cases}$$

其中 $u^\infty=(u_1^\infty,\cdots,u_n^\infty)$ 为给定常向量. 由于方程与边值条件为

转轴不变，因此该问题的解 $\varphi\in C^{2+\tau}(\Omega)\cap C^{1+\tau}(\bar{\Omega})$ 当 $|u^{\infty}|$ 不大，使 $\max\limits_{\bar{\Omega}}|\nabla\varphi|<q_c$ 时除了 φ 有一个未定常数外为存在、唯一。记

$$\varphi=\sum u_i^{\infty}x_i+\phi,$$

适当地选定 φ 中的常数使 $\phi(\infty)=0$，把 ϕ 看为线性问题的解，则由前面得出

$$\|\phi\|_{n-2,2+\tau}\leqslant K_{16}\|u^{\infty}\|. \tag{15}$$

绕流问题的解按下面意义连续依赖于 u^{∞}.

定理 7 取定常数 $Q<q_c$，存在正常数 K_2 依赖于 Q，使得对任何满足条件

$$|u^{\infty}|\leqslant\inf_{\sum l_i^2=1}U(Ql_1,\cdots,Ql_n)$$

的 $u^{\infty,1}$，$u^{\infty,2}$ 对应绕流问题的解 $\varphi^{(1)}$，$\varphi^{(2)}$. 由 $\varphi^{(1)}$、$\varphi^{(2)}$ 定出 $\phi^{(1)}$、$\phi^{(2)}$，则 $\phi^{(1)}$、$\phi^{(2)}$ 满足下面的关系式

$$|\phi^{(2)}-\phi^{(1)}\|_{n-2,2+\tau}\leqslant K_{17}|u^{\infty,2}-u^{\infty,1}|.$$

证 记 $\bar{\varphi}=\phi^{(2)}-\phi^{(1)}$，则 $\bar{\varphi}$ 满足定理 5 中的方程及下面的边界边件与 ∞ 处条件

$$\left.\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial N}\right|_{\Gamma}=-\sum(u_i^{\infty,2}-u_i^{\infty,1})\cos(N,x_i)|_{\Gamma},\quad \bar{\varphi}(\infty)=0,$$

∞ 处条件是由 (15) 得出的. 由 (15) 易知 b_i 满足定理 3 的条件，应用定理 3 得证本定理.

定理 8 非零的亚音速绕流，$q_{\max}$ 只能在 Γ 上取到.

证 如果 $q_{\max}>0$ 在 Ω 内 P 点取到，则经过转轴 $\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=0$ 与 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right|_{\Gamma}=0$ 不变，但可做到 $\nabla u|_P=(q_{\max},0,\cdots,0)$，因此 u_1 在 P 点取到正最大. 由于 u_1 满足椭圆型方程 $\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0$，故由强极值原理得到 u_1 是常数，即 $u_1=q_{\max}$，因此 $u_2=\cdots=u_n=0$，由 $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right|_{\Gamma}=0$ 得到 $q_{\max}=0$，故为矛盾.

当 $q_{\max}>0$ 在 ∞ 处取到，转轴使 $\nabla u|_{\infty}=(q_{\max},0,\cdots,0)$，

则 $$\|\varphi - q_{\max}x_1\|_{n-2,2+\tau} < \infty.$$

做线性变换 $x = x(y)$ 使 $a_{ij}(\infty)$ 化为 δ_{ij}, $\sum \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$ 化为$\sum \frac{\partial}{\partial y_i}\left(c_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right) = 0$. 记 $v = |y|^{n-2}(u_1 - q_{\max})$, 则由上式导出，当 $|y|$ 大时 $v = O(1/|y|)$. 作反演变换 $Y_i = \frac{y_i}{|y|^2}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 方程化为:

$$\sum \frac{\partial}{\partial Y_i}\left(\tilde{c}_{ij}(Y)\frac{\partial v}{\partial Y_j}\right) + \sum B_i \frac{\partial v}{\partial Y_i} + Bv = 0$$

其中 $\tilde{c}_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $B_i = O(|Y|^{n-2})$, $B = O(|Y|^{n-3})$. 做变换

$$v = \begin{cases} \dfrac{\sin(C|Y|)}{Y}w, & (n = 3), \\ (1 - C|Y|^2)w, & (n > 3). \end{cases}$$

方程化为

$$\sum \frac{\partial}{\partial Y_i}\left(\tilde{c}_{ij}(Y)\frac{\partial w}{\partial Y_j}\right) + \sum \tilde{B}_i \frac{\partial w}{\partial Y_i} + \tilde{B}w = 0,$$

取 C 充分大，总可做到 $\tilde{B}(0) < 0$. 由强极值原理得到，当 w 在 $Y = 0$ 取到非负最大或非正最小时，w 只能是常数. 因此仅有两种情况. 一是 $w(0)$ 不是非负最大与非正最小，由于 $w(0) = 0$, w 在原点附近有正有负，故 u_1 在 ∞ 附近有大于与小于 $q_{\max}$ 的部分，因此 $q = (\sum u_{x_i}^2)^{1/2}$ 于 ∞ 附近有大于 $q|_{x=\infty}$ 的部分，与假设 $q|_{x=\infty} = q_{\max}$ 相矛盾，另一情况 w 为常数，$w = 0$, $u_1 = q_{\max}$, 也可导出矛盾. 定理证毕.

定理 9 在 ∞ 附近的亚音速流，必有 $u|_{x=\infty}$ 存在，且有 $u - u|_{x=\infty} = O(|x|^{-\alpha})$ $(\alpha > 0)$. 又整个空间的亚音速流必为均匀流.

证 定理第一部分的证明见前面 ∞ 附近的估计，第二部分应用极值原理即得.

存在问题:

1. 解的单调性. 对绕流问题 (1) 证明当 $U \in [0, q_c^*)$ 时，$Q(U)$ 为单调常增(或单调增加).

2. 边界 $\Gamma \in C^{2+\tau_0}$ 的减弱. 对有尖角的飞行器，证明解为存在.

3. 区域内部为亚音速而 Γ 上出现音速点，证明绕流问题（I）的解仍为存在唯一。

4. 研究带有时间的初、边值的绕流问题。

5. 在一定的几何形状下，对比值 q_c^∞/q_c 的理论估计。

6. q_c^∞/q_c 的计算问题。

第五章　蜕化拟线性抛物型方程的初、边值问题

我们要处理像 $u_t=\Delta(u^m)$ $(m>1)$ 类型方程的初、边值问题．这类方程表示流体在稀疏介质中的流动[23]．

方程展开得：

$$u_t=mu^{m-1}\Delta u+m(m-1)u^{m-2}|\nabla u|^2.$$

当 $u>0$ 时，方程是抛物型的；当 $u=0$ 时，方程蜕化；$u<0$ 按实际情况不加考虑．

蜕化抛物型方程的初、边值问题与 Cauchy 问题（纯初值问题），在一定条件下仍可证得解为存在、唯一，但有一个性质与非蜕化抛物型方程不同：

$$\begin{cases}u_t=u_{xx},\\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}d\xi.$$

设 $\varphi(x)>0(|x|<a)$，$\varphi(x)=0(|x|\geqslant a)$，由解的表示式知当 $t>0$ 时 $u(x,t)>0$．在有界范围内初值非零的情况，时间任何微小的增加，均有解 $u>0$．这表示线性抛物方程解的传播速度为 ∞ 的性质．非线性非蜕化的抛物方程，这一性质仍然保持，这是可证明的．

$$\begin{cases}u_t=(u^m)_{xx}, \quad (m>1),\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\end{cases}$$

设 $\varphi(x)>0(|x|<a)$；$\varphi(x)=0(|x|\geqslant a)$．则可证存在 $\sigma(t)>0$

使 $u(x,t)=0\ (x>\sigma(t))$，其中 $\sigma(0)=a$，$\sigma(t)$ 是一个单调增加的函数．这表示蜕化抛物方程解的传播速度为有限（证明见下一章）．蜕化抛物型方程的定解区域、影响区域和双曲型方程较为类似． 如果初值 $\varphi(x)>0\ (-\infty<x<\infty)$，则由极值原理得到 $u>0\ (\forall x\in \boldsymbol{R},\ t\geqslant 0)$，这时抛物方程没有蜕化，其性质与一般非线性抛物方程类似．

蜕化抛物型方程定解问题的研究，最初空间变量为一个，即自变量为 (x,t)，方程为典型的 $u_t=(u^m)_{xx}$，逐渐拓广到 $u_t=[a(u)]_{xx}+[b(u)]_x$，$u_t=\Delta(u^m)$，$u_t=\Delta(a(u))+\sum b_i(u)u_{x_i}$ 等．再拓广到更为一般的方程，见 [24]，[25]，[26]，[27]，[28] 等．

§1 定解问题的叙述与解的 Hölder 条件估计

引入下列记号与假设． 有界区域 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$，$T>0$，$Q=\Omega\times(0,T]$，$\Gamma=\partial\Omega\times[0,T]\cup\Omega\times\{t=0\}$．记 $x=(x_1,\cdots,x_n)$．考察

$$\begin{cases}u_t=\sum(a_{ij}(x,t,u)u_{x_j})_{x_i}+\sum b_i(x,t,u)u_{x_i}\\ \qquad +c(x,t,u)u,\quad (x,t)\in Q,\\ u|_{t=0}=u_0(x),\quad x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega\times[0,T]}=\psi(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]}.\end{cases}$$

设方程系数、区域与给定的初、边值数据 $u_0(x)$、$\psi(s,t)\ (s\in\partial\Omega)$ 满足下列条件：

(1) $a_{ij}(x,t,r)$，$b_i(x,t,r)$，$c(x,t,r)$，$\sum\dfrac{\partial}{\partial x_j}a_{ij}(x,t,r)$，$\sum\dfrac{\partial}{\partial x_i}b_i(x,t,r)$ 都是 $\in C(\bar{Q}\times\boldsymbol{R})$，$(i,j=1,2,\cdots,n)$．

(2) $\dfrac{1}{\Lambda}\nu(|r|)|\xi|^2\leqslant\sum a_{ij}(x,t,r)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda\nu(|r|)|\xi|^2$，$\forall\xi\in\boldsymbol{R}^n$，$\forall(x,t,r)\in Q\times\boldsymbol{R}$．

其中 Λ 为常数，函数 $\nu(r)\ (0\leqslant r<\infty)$ 满足条件 $\nu(r)\in C[0,\infty)$，

$$\nu(0)=0,\quad \nu(r)>0\ (\text{当 } r>0).$$

∃常数 $\delta>0, m>1$ 使

$$1\leqslant \frac{r\nu(r)}{\int_0^r \nu(s)ds}\leqslant m\quad (0<r\leqslant\delta),$$

这是比幂函数稍宽的条件,即 $\nu(r)$ 的幂指数在 0 与 $m-1$ 之间.

(3) $|b_i(x,t,r)|$, $\sum\left|\frac{\partial b_i(x,t,r)}{\partial x_i}\right|$, $|c(x,t,r)|\leqslant\Lambda$, $\forall(x,t,r)\in\bar{Q}\times\boldsymbol{R}$.

(4) ∃常数 $a_0>0$ 与 $\theta_0\in(0,1)$ 使

$$\operatorname{mes}\{K(\rho)\cap\Omega\}\leqslant(1-\theta_0)K(\rho),\quad (\rho\leqslant a_0),$$

其中 $K(\rho)$ 为中心在 $\partial\Omega$ 上的球.

(5) 设 $u_0(x)\geqslant 0$, $\phi(s,t)\geqslant 0$, $(s\in\partial\Omega)$. 但在进行先验估计时,设 $u_0(x)>0$, $(x\in\bar{\Omega})$, $\phi(s,t)>0$, $(s,t)\in\partial\Omega\times[0,T]$, 满足连接条件 $u_0(s)=\phi(s,0)$. 且设 u 于 Γ 上满足 Hölder 条件, Γ 本身也设为满足 Hölder 条件.

设 $u\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$ 来进行解的先验估计. 方程右端添加

$$\begin{cases}0, & (|u|\geqslant\varepsilon),\\ \sum((\varepsilon^2-u^2)^m u_{x_i})_{x_i}, & (|u|<\varepsilon),\end{cases}$$

其中 ε 将于下面取定.

设 u 为添加后方程及满足初、边值条件的解. 做变换 $u=e^{\lambda t}v$, 其中 λ 为常数. 方程化为:

$$v_t=\sum(a_{ij}^{\varepsilon}v_{x_j})_{x_i}+\sum b_i v_{x_i}+(c-\lambda)v,$$

其中

$$a_{ij}^{\varepsilon}=a_{ij}+\delta_{ij}(\varepsilon^2-u^2)^m,\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1, & (i=j),\\ 0, & (i\neq j).\end{cases}$$

故 v 于 Q 中取最小点处有 $v_t\leqslant 0$, $v_{x_i}=0$, $\sum(a_{ij}^{\varepsilon}v_{x_j})_{x_i}\geqslant 0$,

$$\Rightarrow (c-\lambda)v\leqslant 0.$$

故取 $\lambda>\sup\limits_{Q\times\boldsymbol{R}}c(x,t,r)$, 例如取 $\lambda=2\Lambda$ 时, 由上式可见, v 于 Q

内不能取到负最小，如果 v 于 Q 内取最小值零，则由强极值原理得 $v\equiv 0$ 于 $\bar{Q}$，与 $v|_\Gamma>0$ 矛盾．因此 $v>0$ 于 $\bar{Q}$，$u>0$ 于 $\bar{Q}$．取 $\lambda<\inf\limits_{\bar{Q}\times(0,\infty)} c(x,t,r)$，例如取 $\lambda=-2\Lambda$ 时，由上式可见，v 于 Q 内不能取到正最小．因此

$$v\geqslant\min_\Gamma v\geqslant\min\{\inf_\Omega u_0(x),\ \inf_{\partial\Omega\times[0,T]}\phi(s,t)\},$$

$$u\geqslant e^{-2\lambda T}\min\{\inf_\Omega u_0(x),\ \inf_{\partial\Omega\times[0,T]}\phi(s,t)\}\equiv M_1.$$

v 于 Q 中取正最大点处 $v_t\geqslant 0$，$v_{x_i}=0$，$\sum(a^\varepsilon_{ij}v_{x_j})_{x_i}\leqslant 0$，

$$\Rightarrow (c-\lambda)v\geqslant 0.$$

取 $\lambda>\max\{0,\sup\limits_{\bar{Q}\times(0,\infty)} c(x,t,r)\}$，例如取 $\lambda=2\Lambda$，则 v 于 Q 内不能取到正最大．因此

$$v\leqslant\max\{\sup_\Omega u_0(x),\ \sup_{\partial\Omega\times[0,T]}\phi(s,t)\},$$

$$u\leqslant e^{2\Lambda T}\max\{\sup_\Omega u_0(x),\ \sup_{\partial\Omega\times[0,T]}\phi(s,t)\}\equiv M.$$

综合上述得到，$0<M_1\leqslant u\leqslant M$，取 $\varepsilon\leqslant M_1$，则添加方程成为原方程．因此得到原方程初、边值问题有先验估计：

$$0<M_1\leqslant u\leqslant M.$$

依赖于 M，M_1 而不依赖于 u 的 Hölder 条件的估计是非蜕化问题的估计．第一章中已有讨论．现在要考察的是，不依赖于 u 与 M_1 的 Hölder 条件估计，因为正是这一估计才可在讨论蜕化问题解的存在性时使用，因为这时要作出序列 $u_k(x,t)$，$(x,t)\in\bar{Q}$，使 $\min\limits_\Gamma u_k\to 0\ (k\to\infty)$．

做变换 $u=e^{\Lambda t}v$，v 改记为 u，系数仍用原记号．这一变换的作用是使 $c(x,t,u)\leqslant 0$．

适当改变 $\nu(r)$ 于 $\delta\leqslant r<\infty$ 的函数值，例如 $\nu(r)=\nu(\delta)$ $(r>\delta)$，并增大 Λ，则可设当 $r\in(0,\infty)$ 时，下面诸条件满足：

$$\frac{1}{\Lambda}\nu(r)|\xi|^2\leqslant\sum a_{ij}(x,t,r)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda\nu(r)|\xi|^2,$$

$$1 \leqslant \frac{r\nu(r)}{\int_0^r \nu(s)ds} \leqslant m,$$

$$|b_i(x, t, r)| \leqslant \Lambda, \quad \left|\sum \frac{\partial b_i(x, t, r)}{\partial x_i}\right| \leqslant \Lambda,$$

$$-\Lambda \leqslant c(x, t, r) \leqslant 0.$$

做变换 $w = \int_0^u \nu(s)ds$，逆变换记为 $u = \Phi(w)$，这样，上面关于 ν 的不等式成为：

$$\frac{1}{mw} \leqslant \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)} \leqslant \frac{1}{w}, \quad (w > 0).$$

从 w_1 到 w_2 $(w_1 < w_2)$ 积分得：

$$\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/m} \leqslant \frac{\Phi(w_2)}{\Phi(w_1)} \leqslant \frac{w_2}{w_1}.$$

上面两式结合得：

$$\frac{1}{m} \leqslant \frac{\Phi'(w_1)}{\Phi'(w_2)} \leqslant m\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1-1/m},$$

类似地得到：

$$\frac{1}{m} \leqslant \frac{\nu(u_2)}{\nu(u_1)} \leqslant m\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{m-1}, \quad (0 < u_1 < u_2).$$

设 $(x^0, t^0) \in \bar{Q}$，中心在 x^0，半径为 ρ 的球记为 K_ρ. 对 $0 \leqslant t \leqslant T$，记

$$A_{k,\rho}(t) = \{x \in K_\rho \cap \Omega \mid w(x, t) > k\},$$
$$B_{k,\rho}(t) = \{x \in K_\rho \cap \Omega \mid w(x, t) < k\},$$

其中 $w(x, t) = \int_0^{u(x,t)} \nu(s)ds$.

设 $\zeta(x)$ 为 K_ρ 中的截断函数. 当 $k \geqslant \max\limits_{x \in K_\rho \cap \partial\Omega} w(x, t)$时，方程乘 $\zeta^2(x)(w-k)^+$ 于 Ω 积分. 由于

$$\int_\Omega \zeta^2(x)u_t(w-k)^+dx = \int_\Omega \zeta^2\Phi'(w)(w-k)^+w_t dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\zeta^2\int_k^{w}\Phi'(\tau)(\tau-k)^+d\tau dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\zeta^2\int_0^{w-k}\Phi'(\tau+k)\tau^+d\tau dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx,$$

其中

$$\chi_k(s)=\int_0^s\Phi'(\tau+k)\tau d\tau,$$

故得:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx+\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2\sum a_{ij}w_{x_i}u_{x_j}dx$$

$$=-2\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta(w-k)\sum a_{ij}\zeta_{x_i}u_{x_j}dx$$

$$+\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2(w-k)(\sum b_iu_{x_i}+cu)dx,$$

记

$$h_i(x,t,r)=\int_0^r b_i(x,t,\Phi(k+\tau))\Phi'(k+\tau)\tau d\tau,$$

则有

$$|h_i|\leqslant\Lambda\int_0^r\Phi'(k+\tau)\tau d\tau=\Lambda\chi_k(r),\quad\left|\frac{\partial h_i}{\partial x_i}\right|\leqslant\Lambda\chi_k(r),$$

$$\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2(w-k)b_iu_{x_i}dx=\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2\frac{dh_i(x,t,w-k)}{dx_i}dx$$

$$-\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2\left[\int_0^{w-k}\frac{\partial b_i(x,t,\Phi(k+\tau))}{\partial x_i}\Phi'(k+\tau)\tau d\tau\right]dx,$$

上式右端用分部积分估计,并注意

$$\sum a_{ij}w_{x_i}u_{x_j}\geqslant\sum\frac{a_{ij}}{\nu(u)}w_{x_i}w_{x_j}\geqslant\frac{1}{\Lambda}\frac{\nu(e^{\lambda t}u)}{\nu(u)}\geqslant\frac{1}{m\Lambda},$$

由此得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx+\frac{1}{m\Lambda}\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2|\nabla w|^2dx$$

$$\leqslant 2\Lambda\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta|\nabla\zeta||\nabla w|(w-k)dx$$

$$+2n\Lambda\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta|\nabla\zeta|\chi_k(w-k)dx$$

$$+n\Lambda\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx,$$

(应用了 $c(x,t,r)\leqslant 0$)。

应用 Schwarz 不等式，由上式得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx+\frac{1}{2m\Lambda}\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2|\nabla w|^2dx$$

$$\leqslant\gamma\left[\int_{A_{k,\rho}(t)}|\nabla\zeta|^2(w-k)^2dx\right.$$

$$\left.+\Phi'(k)\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx\right],$$

其中 $\gamma=\gamma(n,\Lambda,m,M)$，上式的成立，是应用了

$$\frac{\chi_k(s)}{s^2}=\frac{1}{s^2}\int_0^s\Phi'(k+\tau)\tau d\tau\leqslant m\Phi'(k)\frac{\int_0^s\tau d\tau}{s^2}=\frac{m}{2}\Phi'(k).$$

继续化得：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\gamma\Phi'(k)t}\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx\right]$$

$$+\frac{1}{2m\Lambda}e^{-\gamma\Phi'(k)t}\int_{A_{k,\rho}(t)}\zeta^2|\nabla w|^2dx$$

$$\leqslant\gamma e^{-\gamma\Phi'(k)t}\int_{A_{k,\rho}(t)}|\Delta\zeta|^2(w-k)^2dx。\tag{1}$$

当 $k\leqslant\inf\limits_{x\in K(\rho)\cap\partial\Omega}w(x,t)$ 时，方程乘 $\zeta^2(w-k)^-$ 于 Ω 积分，记

$$\tilde{\chi}_k(s)=\int_0^s\Phi'(k-\tau)\tau d\tau$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\gamma\Phi'(k)t}\int_{B_{k,\rho}(t)}\zeta^2\tilde{\chi}_k(k-w)dx\right]$$

$$+\frac{1}{2m\Lambda}e^{-\gamma\Phi'(k)t}\int_{B_{k,\rho}(t)}\zeta^2|\nabla w|^2dx$$

$$\leqslant \gamma e^{-\gamma\Phi'(k)t}\left[\iint_{B_{k,\rho}(t)}|\nabla\zeta|^2(k-w)^2dx+\text{mes}\,B_{k,\rho}(t)\right] \quad (2)$$

其中 $\gamma=\gamma(n,\Lambda,m,M)$. 这里应用了

$$\frac{\tilde{\chi}_k(k-w)}{(k-w)^2\Phi'(k)}=\frac{1}{(k-w)^2}\int_0^{k-w}\frac{\Phi'(k-w)}{\Phi'(k)}\tau d\tau$$

$$\leqslant\frac{m}{(k-w)^2}\int_0^{k-w}\left(1-\frac{\tau}{k}\right)^{\frac{1}{m}-1}\tau d\tau$$

$$\leqslant\frac{m}{k-w}\int_0^{k-w}\left(1-\frac{\tau}{k-w}\right)^{\frac{1}{m}-1}d\tau=m^2,$$

又 $\text{mes}\,B_{k,\rho}(t)$ 一项是由 $\int_\Omega\zeta^2(w-k)^-c(x,t,u)udx$ 出来的.

满足不等式 (1)、(2) 的函数，称为属于拓广的 $\mathscr{B}_2(Q,M,m,\gamma)$ 类函数.

要对拓广的 $\mathscr{B}_2$ 类函数的性质进行考察，先研究一下 χ_k、$\tilde{\chi}_k$ 的性质.

当 $0<w_1\leqslant w_2\leqslant 2w_1$ 时有:

$$\frac{1}{m}\leqslant\frac{\Phi'(w_1)}{\Phi'(w_2)}\leqslant 2^{1-1/m}m<2m.$$

因此,当 $\mu>k\geqslant\mu/2>0$, $H\leqslant\mu-k$, $0<\beta<1$ 时有:

$$\frac{\chi_k(H)}{\Phi'(\mu)}=\int_0^H\frac{\Phi'(k+\tau)}{\Phi'(\mu)}\tau d\tau,\quad \frac{1}{m}\leqslant\frac{\Phi'(k+\tau)}{\Phi'(\mu)}\leqslant 2m,$$

因此有

$$\frac{H^2}{2m}\leqslant\frac{\chi_k(H)}{\Phi'(\mu)}\leqslant mH^2,$$

$$\frac{\chi_k(H)}{\chi_k(\beta H)}-1=\frac{\int_{\beta H}^{H}\frac{\Phi'(k+\tau)}{\Phi'(k+\beta H)}\tau d\tau}{\int_0^{\beta H}\frac{\Phi'(k+\tau)}{\Phi'(k+\beta H)}\tau d\tau}\leqslant m^2\frac{\int_{\beta H}^{H}\tau d\tau}{\int_0^{\beta H}\tau d\tau}$$

$$=\frac{m^2(1-\beta^2)}{\beta^2},$$

$$\frac{\chi_k(H)}{\chi_k(\beta H)}\leqslant 1+\frac{m^2(1-\beta^2)}{\beta^2}.$$

当 $k>H>0,\ 0<\beta<1$ 时，由

$$\frac{1}{m}\leqslant\frac{\Phi'(w_1)}{\Phi'(w_2)}\leqslant m\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1-1/m},\quad (0<w_1<w_2),$$

得：

$$\frac{1}{m}\int_0^H\tau d\tau\leqslant\int_0^H\frac{\Phi'(k-\tau)}{\Phi'(k)}\tau d\tau\leqslant m\int_0^H\left(1-\frac{\tau}{k}\right)^{1/m-1}\tau d\tau$$

$$\leqslant mH\int_0^H\left(1-\frac{\tau}{H}\right)^{1/m-1}d\tau$$

即：

$$\frac{H^2}{2m}\leqslant\frac{\tilde{\chi}_k(H)}{\Phi'(k)}\leqslant m^2H^2$$

$$\frac{\tilde{\chi}_k(H)}{\tilde{\chi}_k(\beta H)}-1=\frac{\int_{\beta H}^{H}\frac{\Phi'(k-\tau)}{\Phi'(k-\beta H)}\tau d\tau}{\int_0^{\beta H}\frac{\Phi'(k-\tau)}{\Phi'(k-\beta H)}\tau d\tau}$$

$$\leqslant m^2\frac{\int_{\beta H}^{H}(k-\tau)^{1/m-1}\tau d\tau}{\int_0^{\beta H}(k-\tau)^{1/m-1}\tau d\tau},\tag{3}$$

当 $k/2\leqslant H\leqslant k$ 时，(3) 式右端

$$\leqslant\frac{m^2H\int_{\beta H}^{H}(H-\tau)^{1/m-1}d\tau}{(2H)^{1/m-1}\int_0^{\beta H}\tau d\tau}<\frac{4m^3}{\beta^2}(1-\beta)^{1/m},$$

当 $H < k/2$ 时，(3) 式右端

$$\leqslant \frac{m^2\int_{\beta H}^{H}\left(\frac{k}{2}\right)^{1/m-1}\tau d\tau}{\int_0^{\beta H}k^{1/m-1}\tau d\tau} \leqslant \frac{2m^3}{\beta^2}(1-\beta^2)$$

故得：

$$\frac{\tilde{\chi}_k(H)}{\tilde{\chi}_k(\beta H)} \leqslant 1 + \frac{4m^3(1-\beta)^{1/m}}{\beta^2}.$$

固定 $\rho \in (0, 1]$，记 $Q_\rho = \{(x, t) \mid |x - x^0| < \rho, t^0 - a\eta\rho^2 < t < t^0\}$，其中 $\eta = \Phi'(\rho^\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon \leqslant 1/2)$，$\varepsilon$ 于下面取定．a 为适当选取的常数，将于下面引理中取定：记

$$\operatorname{mes} K(1) = \kappa_n,\ \sup_{Q_\rho \cap Q} w(x, t) = \mu,\ \inf_{Q_\rho \cap Q} w(x, t) = \tilde{\mu},$$

$$\omega = \mu - \tilde{\mu},\quad \rho_i = \left[1 - \frac{i}{3}(1 - 2^{-1/n})\right]\rho,\ (i = 1, 2, 3),$$

$$\xi = \frac{1}{m^2}\Phi'(\mu),\ \eta_k = \frac{1}{m}\Phi'(k).$$

设 $\mu > 2\rho^\varepsilon$，$\rho^\varepsilon \leqslant k \leqslant \mu$，则 $\xi \leqslant \eta_k \leqslant \eta$.

引理 1 存在常数 $\beta, a, b \in (0, 1)$ 使当

$$k \geqslant \max\{\mu/2,\ \sup_{Q_\rho \cap \Gamma} w(x, t)\},\ H = \mu - k > 0,$$

$$\operatorname{mes} A_{k,\rho}(t^0 - a\xi\rho^2) \leqslant \frac{\kappa_n}{2}\rho_1^n \text{ 时}$$

$$\operatorname{mes}\{\kappa(\rho_1) \setminus A_{k+\beta H, \rho_1}(t)\} \geqslant b\kappa_n\rho_1^n,\ \forall t \in [t^0 - a\xi\rho^2, t^0],$$

当 $k \leqslant \inf_{Q_\rho \cap \Gamma} w(x, t)$，$H = k - \tilde{\mu} \geqslant \rho^\varepsilon$，$\operatorname{mes} B_{k,\rho_1}(t^0 - a\eta_k\rho^2) \leqslant \frac{\kappa_n}{2}\rho_1^n$ 时，

$$\operatorname{mes}\{K(\rho_1) \setminus B_{k-\beta H, \rho_1}(t)\} \geqslant b\kappa_n\rho_1^n,\ \forall t \in [t^0 - a\eta_k\rho^2, t^0].$$

证 对 $\sigma \in (0, 1)$，记

$$\zeta(x, s, s(1-\sigma)) = \begin{cases} 1, & |x - x^0| \leqslant s(1-\sigma), \\ \dfrac{s - |x - x^0|}{\sigma s}, & s(1-\sigma) < |x - x^0| < s, \\ 0, & |x - x^0| \geqslant s, \end{cases}$$

在 (1) 中取 $\zeta=\zeta(x,\rho_1,\rho_1(1-\sigma))$，对 t 由 $t^0-a\xi\rho^2$ 积分到 t，其中 $t^0-a\xi\rho^2\leqslant t\leqslant t^0$，得：

$$e^{-\gamma\Phi'(k)t}\int_{A_{k,\rho_1}(t)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx$$
$$\leqslant e^{-\gamma\Phi'(k)(t^0-a\xi\rho^2)}\left[\int_{A_{k,\rho_1}(t^0-a\xi\rho^2)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx\right.$$
$$\left.+\gamma a\xi\rho^2\frac{H^2}{(\sigma\rho_1)^2}K_n\rho_1^n\right],$$

把引理的假设代入上式得：

$$\int_{A_{k,\rho_1}(t)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx\leqslant e^{\gamma\Phi'(k)a\xi\rho^2}\left[\chi_k(H)\frac{K_n}{2}\rho_1^n\right.$$
$$\left.+2\gamma a\xi\frac{H^2}{\sigma^2}K_n\rho_1^n\right].$$

又

$$\int_{A_{k,\rho_1}(t)}\zeta^2\chi_k(w-k)dx\geqslant\int_{A_{k+\beta H,\rho_1(1-\sigma)}(t)}\chi_k(w-k)dx$$
$$\geqslant\chi_k(\beta H)\operatorname{mes}A_{k+\beta H,\rho_1(1-\sigma)}(t),$$

因此

$$\operatorname{mes}A_{k+\beta H,\rho_1(1-\sigma)}(t)\leqslant e^{\gamma\Phi'(k)a\xi\rho^2}\left[\frac{\chi_k(H)}{\chi_k(\beta H)}\frac{1}{2}\kappa_n\rho_1^n\right.$$
$$\left.+2\gamma a\sigma^{-2}\frac{\xi H^2}{\chi_k(\beta H)}\kappa_n\rho_1^n\right]\leqslant e^{\gamma\Phi'(k)a\xi\rho^2}\left\{\frac{1}{2}\left[1+\frac{m^2(1-\beta^2)}{\beta^2}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{4a\gamma}{m\beta^2\sigma^2}\right\}\kappa_n\rho_1^n.$$

上式的成立，应用了 $\dfrac{\chi_k(\beta H)}{\Phi'(\mu)}\geqslant\dfrac{(\beta H)^2}{2m}$. 取定 $\beta=\beta(m)\in(0,1)$ 使

$$\frac{1}{2}\left[1+\frac{m^2(1-\beta^2)}{\beta^2}\right]\leqslant\frac{3}{4},$$

由于

$$k\geqslant\mu/2\geqslant\rho^\varepsilon,\ \Phi'(k)\leqslant m\Phi'(M)(M/k)^{1-1/m}$$
$$\leqslant m\Phi'(M)M^{1-1/m}\rho^{\varepsilon(1/m-1)},$$

又

$$\mu \geqslant 2\rho^{\varepsilon}, \quad \xi = \frac{1}{m^2}\Phi'(\mu) \leqslant \frac{1}{m}\Phi'(M)M^{1-1/m}(2\rho^{\varepsilon})^{1/m-1},$$

因此有:

$$\gamma\Phi'(k)a\xi\rho^2 \leqslant a\gamma\Phi'(M)^2M^{2-2/m},$$

故可取 a, b_1, σ_0 充分小(仅依赖于 n, M, m, γ, T) 使

$$\frac{1}{2}\left[1 + \frac{m^2(1-\beta^2)}{\beta^2}\right]e^{a\gamma\Phi'(k)\xi\rho^2} < (1-b_1)(1-\sigma_0)^n,$$

再取 a 更小使

$$e^{a\gamma\Phi'(k)\xi\rho^2}\left\{\frac{1}{2}\left[1 + \frac{m^2(1-\beta^2)}{\beta^2}\right] + \frac{4a\gamma}{m\beta^2\sigma_0^2}\right\}$$
$$\leqslant (1-b_1)(1-\sigma_0)^n,$$

因此,

$$\operatorname{mes} A_{k+\beta H,\rho_1(1-\sigma_0)}(t) \leqslant (1-b_1)(1-\sigma_0)^n,$$

当 $t \in [t^0 - a\xi\rho^2, t^0]$ 时,

$$\operatorname{mes}\{K(\rho_1)\backslash A_{k+\beta H,\rho_1}(t)\}$$
$$\geqslant \operatorname{mes}\{K(\rho_1(1-\sigma_0))\backslash A_{k+\beta H,\rho_1(1-\sigma_0)}(t)\} \geqslant (1-\sigma_0)^n\kappa_n\rho_1^n$$
$$-(1-b_1)(1-\sigma_0)^n\kappa_n\rho_1^n = b_1(1-\sigma_0)^n\kappa_n\rho_1^n.$$

取 $b = b_1(1-\sigma_0)^n$, 就得到要证明的第一个不等式, 第二个不等式证明类似.

引理 2 设 $Q_\rho \subset Q$, 即讨论内估计情况. $\forall\theta_1 > 0$, $\exists s = s(\theta_1) > 0$ 使

(i) $k \geqslant \mu/2$, $H = \mu - k > 0$, $\operatorname{mes} A_{k,\rho_1}(t^0 - a\xi\rho^2) \leqslant \frac{\kappa_n}{2}\rho_1^n$,

$$\Rightarrow \int_{t^0-aA\rho^2}^{t^0} \operatorname{mes} A_{\mu-H/2^{s+1},\rho_1}(t)dt \leqslant \theta_1\xi\rho_1^{n+2}.$$

(ii) $$\max_{t\in[t^0-a\eta\rho^2,\,t^0-a\xi\rho^2]} \operatorname{mes} B_{\tilde{\mu}+\omega/2,\rho_1}(t) \leqslant \frac{\kappa_n}{2}\rho_1^n \Rightarrow \omega \leqslant 2^{s+2}\rho^{\varepsilon}$$

或 $$\int_{t^0-a\eta_{k_{s+2}}\rho^2}^{t^0} \operatorname{mes} B_{k_{s+1},\rho_1}(t)dt \leqslant \theta_1\eta_{k_{s+2}}\rho_1^{n+2},$$

其中 $k_s = \tilde{\mu} + \omega/2^s$, $\eta_{k_s} = \frac{1}{m}\Phi'(k_s)$.

证 先证第一部分. 由 (i) 的条件与引理 1 得:

$$\operatorname{mes}\{K(\rho_1)\backslash A_{k+\beta H,\rho_1}(t)\} \geqslant b\kappa_n\rho_1^n, \quad t\in[t^0-a\xi\rho^2,\ t^0].$$

取 r_0 满足

$$1-\beta \geqslant 2^{-r_0},$$

记 $k_l=\mu-H/2^l$, 则当 $t\in[t^0-a\xi\rho^2,\ t^0]$ 时有:

$$\operatorname{mes}\{K(\rho_1)\backslash A_{k_l,\rho_1}(t)\} \geqslant b\kappa_n\rho_1^n, \quad \text{当 } l\geqslant r_0 \text{ 时},$$

应用 de Giorgi 引理(见 [49]).

$$(k_{l+1}-k_l)\operatorname{mes}^{1-1/n}A_{k_{l+1},\rho_1}(t)$$
$$=\frac{\beta\rho_1^n}{\operatorname{mes}\{K(\rho_1)\backslash A_{k_l,\rho_1}(t)\}}\int_{D_l(t)}|\nabla w|\,dx$$

其中

$$D_l(t)=A_{k_l,\rho_1}(t)\backslash A_{k_{l+1},\rho_1}(t),$$

结合上面两个不等式得:

$$\frac{H}{2^{l+1}}\operatorname{mes}A_{k_{l+1},\rho_1}(t)\leqslant\frac{\beta}{b\kappa_n^{1-1/n}}\rho_1\left[\int_{D_l(t)}|\nabla w|^2dx\right]^{1/2}[\operatorname{mes}D_l(t)]^{1/2},$$

上式从 $t^0-a\xi\rho^2$ 到 t^0 积分并应用 Schwarz 不等式得:

$$\left(\frac{H}{2^{l+1}}\right)^2\left[\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0}\operatorname{mes}A_{k_{l+1},\rho_1}(t)dt\right]^2$$
$$\leqslant\left(\frac{\beta}{b\kappa_n^{1-1/n}}\right)^2\rho_1^2\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0}\int_{A_{k_l,\rho_1}(t)}|\nabla w|^2dxdt$$
$$\cdot\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0}\operatorname{mes}D_l(t)dt$$

为了估计 $|\nabla w|^2$ 的积分项, 于 (1) 中取 $\zeta=\zeta(x,\rho,\rho_1)$, 从 $t^0-a\xi\rho^2$ 到 t^0 积分得

$$\frac{1}{2m\Lambda}\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0}e^{-\gamma\Phi'(k_l)t}\int_{A_{k_l,\rho_1}(t)}|\nabla w|^2dxdt$$
$$\leqslant e^{-\gamma\Phi'(k_l)(t^0-a\xi\rho^2)}\left\{\int_{A_{k_l,\rho_1}(t^0-a\xi\rho^2)}\zeta^2\chi_{k_l}(w-k_l)dx\right.$$
$$\left.+\gamma a\xi\rho^2\frac{9}{(1-2^{-1/n})^2\rho^2}\left(\frac{H}{2^l}\right)^2\kappa_n\rho^n\right\}$$

$$\leqslant e^{-\gamma\Phi'(k_l)(t^0-a\xi\rho^2)}\left[\chi_{k_l}\left(\frac{H}{2^l}\right)+\frac{9a\gamma}{(1-2^{-1/n})^2}\frac{\xi H^2}{2^{2l}}\right]\kappa_n\rho^n,$$

因此

$$\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0}\int_{A_{k_l,\rho_1}(t)}|\nabla w|^2dxdt\leqslant 2mAe^{\gamma\Phi'(k)a\xi\rho^2}$$

$$\cdot\left[2m^3+\frac{9a\gamma}{(1-2^{-1/n})^2}\right]\frac{\xi H^2}{2^{2l}}\kappa_n\rho^n,$$

这一估计代入上式得

$$\left[\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0}\operatorname{mes}A_{k_{l+1},\rho_1}(t)dt\right]^2\leqslant C_1\xi\rho^{n+2}\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0}\operatorname{mes}D_l(t)dt,$$

其中 $C_1=C_1(n, m, M, \gamma, T)$. 取 $l=r_0, r_0+1,\cdots, s$, 相加得:

$$(s-r_0+1)\left[\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0}\operatorname{mes}A_{k_{s+1},\rho_1}(t)dt\right]^2\leqslant C_1\kappa_n a\xi^2\rho^{2n+4},$$

取 s 使 $\left(\dfrac{C_1\kappa_n a}{s-r_0+1}\right)^{1/2}<\dfrac{\theta_1}{2^{1+2/n}}$ 就得到

$$\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0}\operatorname{mes}A_{\mu-H/2^{s+1},\rho_1}(t)dt\leqslant\theta_1\xi\rho_1^{n+2}.$$

再证明引理的第二部分. 当 $\omega>2^{s+2}\rho^\varepsilon$ 时, 在引理 1 中取 $k=\tilde{\mu}+\omega/2$ (这满足 $H=k-\tilde{\mu}=\omega/2\geqslant\rho^\varepsilon$) 得到:

$\operatorname{mes}\{K(\rho_1)\backslash B_{\tilde{\mu}+\omega(1-\beta)/2,\rho_1}(t)\}\geqslant b\kappa_n\rho_1^n$, 当 $t\in[t^0-a\eta\rho^2, t^0]$ 时, 取 r_0 使 $2^{-r_0}\geqslant(1-\beta)/2$, 因此当 $l\geqslant r_0$, $t\in[t^0-a\eta\rho^2, t^0]$ 时,

$$\operatorname{mes}\{K(\rho_1)\backslash B_{k_l,\rho_1}(t)\}\geqslant b\kappa_n\rho_1^n,\ k_l=\tilde{\mu}+\omega/2^l,$$

仿前面做法得:

$$\frac{\omega^2}{2^{2l+2}}\left[\int_{t^0-a\eta_{k_{s+2}}\rho^2}^{t^0}\operatorname{mes}B_{k_l,\rho_1}(t)dt\right]^2$$

$$\leqslant\left(\frac{\beta}{b\kappa_n^{1-1/n}}\right)^2\rho_1^2\int_{t^0-a\eta_{k_{s+2}}\rho^2}^{t^0}\int_{B_{k_l,\rho_1}(t)}|\nabla w|^2dxdt$$

$$\cdot\int_{t^0-a\eta_{k_{s+2}}\rho^2}^{t^0}\operatorname{mes}\widetilde{D}_l(t)dt,$$

$r_0 \leqslant l \leqslant s$，其中 $\tilde{D}_l(t) = B_{k_l,\rho_1}(t) \backslash B_{k_{l+1},\rho_1}(t)$.

于 (2) 中取 $\zeta = \zeta(x, \rho, \rho_1)$，由 $t^0 - a\eta_{k_{s+2}}$ 到 t^0 积分，并应用 $\omega/(2^{l+1}\rho^\varepsilon) \geqslant 1$ 得：

$$\frac{1}{2m\Lambda}\int_{t^0-a\eta_{k_{s+2}}\rho^2}^{t^0} e^{-\gamma\Phi'(k_l)t}\int_{B_{k_l,\rho_1}(t)} |\nabla w|^2 dxdt$$

$$\leqslant e^{-\gamma\Phi'(k_l)(t^0-a\eta_{k_{s+2}}\rho^2)}\left\{\int_{B_{k_l,\rho}(t^0-a\eta_{k_{s+2}}\rho^2)} \zeta^2\tilde{\chi}_{k_l}(k_l - w)dx\right.$$

$$+ \gamma a\eta_{k_{s+2}}\rho^2 \frac{9}{(1-2^{-1/n})^2\rho^2}\left(\frac{\omega}{2^{l+1}}\right)^2 \kappa_n\rho^n$$

$$\left.+ \gamma a\eta_{k_{s+2}}\rho^2\kappa_n\rho^n\left(\frac{\omega}{2^{l+1}\rho^\varepsilon}\right)^2\right\}$$

再注意到

$$\tilde{\chi}_k(k_l - w) \leqslant m^2\Phi'(k_l)(k_l - w)^2$$

$$\leqslant m^3\Phi'(k_{s+2})(k_l - \tilde{\mu})^2 = m^4\eta_{k_{s+1}}\left(\frac{\omega}{2^l}\right)^2,$$

以下的步骤类似.

引理 2′（近边估计） 设

$$\omega_1 = \operatorname{osc}\{w \mid Q_\rho \cap \Gamma\} \leqslant L\rho^{\varepsilon_1},$$

其中 L, ε_1 为与 ρ 无关的正常数（该条件可由 $\operatorname{osc}\{u \mid Q_\rho \cap \Gamma\} \leqslant K\rho^{\varepsilon_1}$ 推出）. 则当

$\operatorname{mes}\{K(\rho_1)\backslash[K(\rho_1)\cap\Omega]\} \geqslant b_1\rho_1^n$ （b_1 为正常数）时，$\forall\theta_1 > 0$，$\exists s = s(\theta_1) > 0$，使下面三式之一成立：

(i) $\omega = \operatorname{osc}\{w \mid Q_\rho \cap Q\} \leqslant 2^{s+2}\rho^\varepsilon \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1)$;

(ii) $\displaystyle\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0} \operatorname{mes} A_{\mu-\omega/2^{s+1},\rho_1}(t)dt \leqslant \theta_1\xi\rho_1^{n+2}$;

(iii) $\displaystyle\int_{t^0-a\eta_{k_{s+2}}\rho^2}^{t^0} \operatorname{mes} B_{\tilde{\mu}+\omega/2^{s+1},\rho_1}(t)dt \leqslant \theta_1\eta_{k_{s+2}}\rho_1^{n+2}$

$$(k_s = \tilde{\mu} + \omega/2^s).$$

如果 $t^0 - a\xi\rho^2 \leqslant 0$，则结论 (ii)、(iii) 用下面诸式代替：

(ii)′ $\operatorname{mes} A_{\mu-\omega/4,\rho_1}(0) = 0$, $\displaystyle\int_0^{t^0} \operatorname{mes} A_{\mu-\omega/2^{s+1},\rho_1}(t)dt \leqslant \theta_1 t^0\rho_1^n$;

(iii)′ mes $B_{\tilde{\mu}+\omega/4,\rho_1}(0)=0$, $\int_0^{t^0}$ mes $B_{\tilde{\mu}+\omega/2^{s+1},\rho_1}(t)dt\leqslant\theta_1 t^0\rho_1^n$.

证 取 $r_0\geqslant 2$ 除了满足 $2^{-r_0}\leqslant 1-\beta$ 外，还满足 $2^{r_0}\geqslant 4L$. 如果 $\omega\geqslant 2^{s+2}\rho^2$，则 $\omega\geqslant 2^{r_0}\rho^\delta\geqslant 4L\rho^\delta\geqslant 4\omega_1$（当 $s\geqslant r_0$ 时），故 $w(x,t)$ 于 $Q_\rho\cap\Gamma$ 的值域仅能与 $[\tilde{\mu},\tilde{\mu}+\omega/4]$, $[\mu-\omega/4,\mu]$ 之一相交. 设与 $[\mu-\omega/4,\mu]$ 不交，记 $k=\mu-\omega/2^{r_0}$，则

$$k\geqslant\max\{\mu/2,\ \sup_{Q_\rho\cap\Gamma}w(x,t)\},$$

$$\text{mes}\,\{K(\rho_1)\backslash A_{k,\rho_1}(t)\}\geqslant b_1\rho_1^n,\ \text{当 } t\in[t^0-a\xi\rho^2,t^0]\text{ 时.}$$

由此，(ii) 的导出与引理 2 类似.

如果 $t^0-a\xi\rho^2\leqslant 0$，由于 $w(x,t)$ 于 $Q_\rho\cap\Gamma$ 的值域不与 $[\mu-\omega/4,\mu]$ 相交，得到

$$\text{mes}\ A_{\mu-\omega/4,\rho_1}(0)=0.$$

(ii)′ 的另一式导出与引理 2 类似，仅是对 t 积分的长度由 $a\xi\rho^2$ 换为 t^0.

(iii), (iii)′ 同法导出. 引理证毕.

引理 3 $\forall\theta_2>0$, $\exists\,\theta_1>0$ 使

(i) $k\geqslant\max\{\mu/2,\ \sup_{Q_\rho\cap\Gamma}w(x,t)\}$, $H=\mu-k>0$,

$$\int_{t^0-a\xi\rho^2}^{t^0}\text{mes}\ A_{k,\rho_1}(t)dt\leqslant\theta_1\xi\rho_1^{n+2}$$
$$\Rightarrow\text{mes}\ A_{k+H/2,\rho_2}(t)\leqslant\theta_2\rho_2^n,\quad t\in\left[t^0-\frac{a}{4}\xi\rho^2,t^0\right],$$

如又有 mes $A_{k,\rho_1}(t^0-a\xi\rho^2)=0$，则上式对 $t\in[t^0-a\xi\rho^2,t^0]$ 成立.

(ii) $k\leqslant\inf_{Q_\rho\cap\Gamma}w(x,t)$, $H=k-\tilde{\mu}\geqslant\rho^\delta$,

$$\int_{t^0-a\eta_{k-H/2}}^{t^0}\rho^2\text{mes}\ B_{k,\rho_1}(t)dt\leqslant\theta_1\eta_{k-H/2}\rho_1^{n+2}$$
$$\Rightarrow\text{mes}\ B_{k-H/2,\rho_2}(t)\leqslant\theta_2\rho_2^n,\quad t\in\left[t^0-\frac{a}{4}\eta_{k-H/2}\rho^2,t^0\right].$$

如又有 mes $B_{k,\rho_1}(t^0-a\eta_{k-H/2}\rho^2)=0$，则上式对 $t\in[t^0-a\eta_{k-H/2}\rho^2$,

t^0] 成立.

证 仅证 (ii) 作为例子. 令 $\zeta=\zeta(x,\rho_1,\rho_2)$ 代入 (2), 从 τ 到 t 积分,其中 $t^0-a\eta_{k-H/2}\rho^2\leqslant\tau<t\leqslant t^0$ 得:

$$e^{-\gamma\Phi'(k)t}\tilde{\chi}_k\left(\frac{H}{2}\right)\text{mes }B_{k-H/2,\rho_2}(t)\leqslant e^{-\gamma\Phi'(k)\tau}\Big\{\tilde{\chi}_k(H)\text{ mes }B_{k,\rho_1}(\tau)$$

$$+\gamma\left[\frac{H^2}{(\rho_1-\rho_2)^2}+1\right]\int_\tau^t\text{mes }B_{k,\rho_1}(t)dt\Big\}.$$

由引理假设推出

$$\int_{t^0-a\eta_{k-H/2}\rho^2}^{t^0-a/4\eta_{k-H/2}\rho^2}\text{mes }B_{k,\rho_1}(t)dt\leqslant\theta_1\eta_{k-H/2}\rho_1^{n+2},$$

故于 $[t^0-a\eta_{k-H/2}\rho^2,\ t^0-a/4\eta_{k-H/2}\rho^2]$ 中存在 τ 使

$$\text{mes }B_{k,\rho_1}(\tau)\leqslant\frac{4}{3a}\theta_1\rho_1^n,$$

把这一 τ 代入上式得到,当 $t\in[t^0-a/4\eta_{k-H/2}\rho^2,\ t^0]$ 时,

$$\text{mes }B_{k-H/2,\rho_2}(t)\leqslant e^{\gamma\Phi'(k)a\eta_{k-H/2}\rho^2}\Big\{\frac{\tilde{\chi}_k(H)}{\tilde{\chi}_k(H/2)}\frac{4}{3a}$$

$$+\gamma\frac{\eta_{k-H/2}}{\tilde{\chi}_k(H/2)}\left[\frac{9H^2}{(1-2^{-1/n})^2}+\rho^2\right]\Big\}\theta_1\rho_1^n,$$

由于 $\dfrac{\tilde{\chi}_k(H)}{\tilde{\chi}_k(H/2)}\leqslant 1+16m^3$, $\dfrac{\eta_{k-H/2}H^2}{\tilde{\chi}_k(H/2)}\leqslant 8m$, $\Phi'(k)\eta_{k-H/2}\rho^2\leqslant K$, $H\leqslant\rho^\delta$, 故存在充分小的 θ_1 使引理的结论成立.

当 $\text{mes }B_{k,\rho_1}(t^0-a\eta_{k-H/2}\rho^2)=0$ 时,可取 $\tau=t^0-a\eta_{k-H/2}\rho^2$, 得出引理的另一结论. 证毕.

引理 4 $\exists\,\theta_2>0$ 使

(i) $k\geqslant\max\{\mu/2,\ \sup\limits_{Q_\rho\cap\Gamma}w(x,t)\}$, $H=\mu-k>0$,

$$\max_{t\in[t^0-a\xi\rho^2,t^0]}\text{mes }A_{k,\rho_2}(t)\leqslant\theta_2\rho_2^n\Rightarrow\text{mes}A_{k+H/2,\rho_3}(t)=0,$$
$$t\in[t^0-(a/4)\xi\rho^2,\ t^0],$$

如又有 $\text{mes }A_{k,\rho_2}(t^0-a\xi\rho^2)=0$, 则上式对 $t\in[t^0-a\xi\rho^2,\ t^0]$ 成立.

(ii) $k \leqslant \inf_{Q_\rho \cap \Gamma} w(x,t)$, $H = k - \tilde{\mu} \geqslant \rho^\varepsilon$,

$$\max_{t \in [t^0 - a\eta_k \rho^2, t^0]} \text{mes}\, B_{k,\rho_2}(t) \leqslant \theta_2 \rho_2^n \Rightarrow \text{mes}\, B_{k-H/2,\rho_3}(t) = 0,$$
$$t \in [t^0 - (a/4)\eta_k \rho^2, t^0],$$

如又有 $\text{mes}\, B_{k,\rho_2}(t^0 - a\eta_k\rho^2) = 0$，则上式对 $t \in [t^0 - a\eta_k\rho^2, t^0]$ 成立.

证 仅证 (ii) 作为例子. 记

$$k_h = k - \frac{H}{2} + \frac{H}{2^{h+1}}, \quad t_h = t^0 - \frac{a}{4}\eta_k\rho^2 - \frac{3a}{2^{h+2}}\eta_k\rho^2,$$

$$\rho_h = \rho_3 + \frac{\rho_2 - \rho_3}{2^h}, \quad \mu_h = \max_{t \in [t_h, t^0]} \text{mes}\, B_{k_h,\rho_h}(t),$$

$$\zeta_h(x) = \zeta(x, \rho_h, \rho_{h+1}),$$

$$I_h(t) = e^{-\gamma\Phi'(k_h)(t-t^0+a\eta_k\rho^2)} \int_{B_{k_h,\rho_h}(t)} \tilde{\chi}_{k_h}(k_h - w)\zeta_h^2 dx,$$

由于 $k_h \geqslant h/2$，故有 $\Phi'(k_h) \leqslant 2m\Phi'(k) = 2m^4\eta_k$，再由 $\tilde{\chi}_k$ 的性质得:

$$\tilde{\chi}_k(k_h - w) \leqslant m^2\Phi'(k_h)(k_h - w)^2 \leqslant 2m^5\eta_k(k_h - w)^2,$$

故当 $t \in [t^0 - a\eta_k\rho^2, t^0]$ 时有:

$$\begin{aligned}
I_h(t) &\leqslant \gamma_1\eta_k \int_{B_{k_h,\rho_h}(t)} (k_h - w)^2\zeta_h^2 dx \\
&\leqslant \gamma_1\eta_k \left[\int_{B_{k_h,\rho_h}(t)} dx\right]^{2/n} \\
&\quad \cdot \left\{\int_{B_{k_h,\rho_h}(t)} [(k_h - w)^2\zeta_h^2]^{n/(n-2)} dx\right\}^{(n-2)/n} \\
&\leqslant \gamma_2\eta_k [\text{mes}\, B_{k_h,\rho_h}(t)]^{2/n} \int_{B_{k_h,\rho_h}(t)} |\nabla[(k_h - w)\zeta_h]|^2 dx \\
&\leqslant \gamma_3\eta_k\mu_h^{2/n}\left[\int_{B_{k_h,\rho_h}(t)} |\nabla w|^2\zeta_h^2 dx\right. \\
&\quad \left. + \frac{H^2}{(\rho_h - \rho_{h+1})^2}\mu_h\right],
\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 为常数，由 (2) 得:

$$I'_h(t) + \frac{1}{2m\Lambda} e^{-\gamma\Phi'(k_h)(t-t^0+a\eta_k\rho^2)} \int_{B_{k_h,\rho_h}(t)} |\nabla w|^2 \zeta_h^2 dx$$

$$\leqslant \gamma \left[\frac{H^2}{(\rho_h - \rho_{h+1})^2} + 1\right] \mu_h, \quad \forall t \in [t_{h+1}, t^0]. \tag{5}$$

下面三种情况可能发生:

(i) $I'_h(t) \geqslant 0$. 由 (5) 得到

$$\int_{B_{k_h,\rho_h}(t)} |\nabla w|^2 \zeta_h^2 dx \leqslant 2m\Lambda\gamma e^{\gamma\Phi'(k_h)a\eta_k\rho^2}$$

$$\cdot \left[\frac{H^2}{(\rho_h - \rho_{h+1})^2} + 1\right] \mu_h$$

$$\leqslant 2m\Lambda\gamma e^{\gamma C_1}\left[\frac{H^2}{(\rho_h - \rho_{h+1})^2} + 1\right] \mu_h,$$

代入 (4) 得

$$I_h(t) \leqslant \gamma_3\eta_k\mu_h^{1+2/n}\left[(2m\Lambda\gamma e^{\gamma C_1} + 1)\frac{H^2}{(\rho_h - \rho_{h+1})^2}\right.$$

$$\left. + 2m\Lambda\gamma e^{\gamma C_1}\right]. \tag{6}$$

(ii) 当 $I'_h(t) < 0$ 而 $\exists \tau \in [t_h, t]$, $\ni I'_h(\tau) = 0$. 选 τ 使当 $\tau < s \leqslant t$ 时 $I'_h(s) < 0$. 则 $I_h(t) < I_h(\tau)$, $I_h(\tau)$ 有估计 (5), 因此对 $I_h(t)$, (6) 式成立.

(iii) 当 $I'_h(\tau) < 0$, $\forall \tau \in [t_h, t]$. 则由 (5) 得:

$$\frac{1}{2m\Lambda}\int_{t_h}^{t} e^{-\gamma\Phi'(k_h)(t-t^0+a\eta_k\rho^2)} \int_{B_{k_h,\rho_h}} |\nabla w|^2 \zeta_h^2 dx$$

$$\leqslant I_h(t_h) + \gamma(t - t_h)\left[\frac{H^2}{(\rho_h - \rho_{h+1})^2} + 1\right] \mu_h,$$

或

$$\int_{t_h}^{t}\int_{B_{k_h,\rho_h}(t)} |\nabla w|^2 \zeta_h^2 dx dt \leqslant 2m\Lambda e^{\gamma C_1}\left\{I_h(t_h)\right.$$

$$\left. + \gamma(t - t_h)\left[\frac{H^2}{(\rho_h - \rho_{h+1})^2} + 1\right] \mu_h\right\},$$

(4) 式从 t_h 到 t 积分并应用上式得

$$\int_{t_h}^{t} I_h(\tau)d\tau \leqslant \gamma_3\eta_k\mu_h^{2/n}\Big[2m\Lambda e^{\tau C_1}I_h(t_h) + (2m\Lambda\gamma e^{\tau C_1}+1)(t-t_h)\frac{H^2}{(\rho_h-\rho_{h+1})^2}\mu_h + 2m\Lambda\gamma e^{\tau C_1}(t-t_h)\mu_h\Big],$$

右端 $I_h(t_h)$ 用下式估计

$$I_h(t_h) \leqslant \gamma_1\eta_k\mu_h\Big(k-\frac{H}{2}+\frac{H}{2^{h+1}}-\bar\mu\Big)^2 - \gamma_1\eta_k\mu_h\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{h+1}}\Big)^2H^2 \leqslant \gamma_1\eta_k\mu_hH^2,$$

左端由于 $I_h(\tau)$ 于 $[t_h, t]$ 为单调减少,得到:

$$\int_{t_h}^{t} I_h(\tau)d\tau \geqslant I_h(t)(t-t_h).$$

因此得

$$I_h(t) \leqslant \gamma_3\eta_k\mu_h^{1+2/n}\Big[2m\Lambda\gamma_1e^{\tau C_1}\frac{\eta_kH^2}{t-t_h}+(2m\Lambda\gamma e^{\tau C_1}+1)\cdot\frac{H^2}{(\rho_h-\rho_{h+1})^2}+2m\Lambda\gamma e^{\tau C_1}\Big].$$

三种情况均归纳为上面不等式. 当 $t\in[t_{h+1}, t^0]$ 时,由上式得:

$$I_h(t) \leqslant \gamma_3\eta_k\mu_h^{1+2/n}\Big[2m\Lambda\gamma_1e^{\tau C_1}\frac{\eta_kH^2}{t_{h+1}-t_h}+(2m\Lambda\gamma e^{\tau C_1}+1)\cdot\frac{H^2}{(\rho_h-\rho_{h+1})^2}+2m\Lambda\gamma e^{\tau C_1}\Big].$$

另一方面,由 $I_h(t)$ 的定义得:

$$I_h(t) \geqslant e^{-\tau C_1}\tilde{\chi}_{k_h}(k_h-k_{h+1})\,\mathrm{mes}\,B_{k_{h+1},\rho_{h+1}}(t) \geqslant \frac{e^{-\tau C_1}}{4m}\eta_k(k_h-k_{h+1})^2\,\mathrm{mes}\,B_{k_{h+1},\rho_{h+1}}(t),$$

上式成立, 是因为 $\dfrac{\tilde{\chi}(k_h-k_{h+1})}{(k_h-k_{h+1})^2} \geqslant \dfrac{1}{2m}\Phi'(k_h) \geqslant \dfrac{1}{4m^2}\Phi'(k) = \dfrac{\eta_k}{4m}$. 上面两式结合得

$$\mu_{h+1} \leqslant 4m\gamma_3 e^{\tau C_1}\mu_h^{1+2/n}2^{2(h+1)}\Big[2m\Lambda\gamma_1 e^{\tau C_1}\frac{\eta_k}{t_{h+1}-t_h}$$

$$+(2m\Lambda\gamma e^{\tau C_1}+1)\frac{1}{(\rho_h-\rho_{h+1})^2}+\frac{2m\Lambda\gamma e^{\tau C_1}}{H^2}\Big].$$

用 t_h，ρ_h 的定义代入上式，并应用 $H\geqslant\rho^\delta$ 得

$$\mu_{h+1}\leqslant\frac{C_2}{\rho^2}2^{4h}\mu_h^{1+2/n},$$

其中 $C_2=C_2(n,m,\gamma,M,T)$. 记 $y_h=\frac{\mu_h}{\rho^n}$ 得：

$$y_{h+1}\leqslant C_2 2^{4h}y_h^{1+2/n},$$

由假设

$$y_0=\frac{\mu_0}{\rho^n}=\frac{1}{\rho^n}\max_{t\in[t^0-a\eta_k\rho^2,t^0]}\operatorname{mes}B_{k,\rho_1}\leqslant\theta_2,$$

取 θ_2 很小，可由归纳法证明

$$y_h\leqslant\theta_2 2^{-2nh},\quad(h=0,1,2,\cdots).$$

这是因为

$$y_{h+1}\leqslant C_2 2^{4h}y_h^{1+2/n}\leqslant C_2 2^{4h}(\theta_2 2^{-2nh})^{1+2/n}$$
$$=C_2\theta_2^{1+2/n}2^{-2nh}\leqslant\theta_2 2^{-2n(h+1)},$$

当取 θ_2 满足 $C_2\theta_2^{2/n}\leqslant 2^{-2n}$ 时就使上式成立.

取定 θ_2 后，令 $h\to\infty$，就得到引理要求的式子.

如果 $\operatorname{mes}B_{k,\rho}(t^0-a\eta_k\rho^2)=0$，取 $t_h=t^0-a\eta_k\rho^2(h=0,1,2,\cdots)$，则这时情况 (iii) 不会发生，就得到引理要求的另一式. 证毕.

引理 5 设 $Q_\rho\subset Q$，则 $\exists s>0$ 使

(i) $k\geqslant\frac{\mu}{2}$，$H=\mu-k>0$，$\operatorname{mes}A_{k,\rho_1}(t^0-a\xi\rho^2)\leqslant\frac{\kappa_n}{2}\rho_1^n$

$$\Rightarrow\operatorname{mes}A_{\mu-H/2^{s+3},\rho_3}(t)=0,\ t\in\Big[t^0-\frac{a}{16}\xi\rho^2,t^0\Big].$$

(ii) $\max\limits_{t\in[t^0-a\eta\rho^2,t^0-a\xi\rho^2]}\operatorname{mes}B_{\bar\mu+\omega/2,\rho_1}(t)\leqslant\frac{\kappa_n}{2}\rho_1^n$

$$\Rightarrow \omega \leqslant 2^{s+2}\rho^{\varepsilon} \text{ 或 } \operatorname{osc}\{w, \widetilde{Q}_{\rho/4}\} \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s+3}}\right) \operatorname{osc}\{w, Q_\rho\},$$

其中

$$\widetilde{Q}_{\rho/4} = \left\{(x, t) \mid x \in K\left(\frac{\rho}{4}\right),\ t^0 - a\xi\left(\frac{\rho}{4}\right)^2 < t < t^0\right\}.$$

证 由引理 4 定 θ_2，再由引理 3 定 θ_1，再由引理 2 定 s，就得到 (i)．关于 (ii) 是由于 $\omega > 2^{s+2}\rho^{\varepsilon}$ 时，我们得到

$$\operatorname{mes} B_{\tilde{\mu}+\omega/2^{s+3}, \rho_3}(t) = 0,\ t \in [t^0 - a\eta_{k_{s+2}}(\rho/4)^2, t^0]$$

其中 $\eta_{k_s} = \frac{1}{m}\Phi'(k_s)$，$k_s = \tilde{\mu} + \omega/2^s$．由于 $\rho_3 \geqslant \rho/4$，$\eta_{k_{s+2}} \geqslant \xi$，因此有：

$$\operatorname{osc}\{w, \widetilde{Q}_{\rho/4}\} \leqslant \mu - (\tilde{\mu} + \omega/2^{s+3}) = \left(1 - \frac{1}{2^{s+3}}\right)\omega.$$

引理证毕．

引理 5′ 设 $\partial\Omega$ 满足外锥条件

$$\operatorname{mes}\{K(\rho) \cap \Omega\} \leqslant (1 - \theta_0) \operatorname{mes} K(\rho),\ (\rho \leqslant a_0,\ 0 < \theta_0 < 1),$$

且 $w(x, t) \in C^{\varepsilon_1, \varepsilon_1/2}(\Gamma)$． 如果 $\widetilde{Q}_{\rho/4} \cap \Gamma \neq \varnothing$，则 $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$，$\exists s > 0$ 使

$$\operatorname{osc}\{w, \widetilde{Q}_{\rho/4} \cap Q\} \leqslant 2^{s+2}\rho^{\varepsilon},$$

或

$$\operatorname{osc}\{w, \widetilde{Q}_{\rho/4} \cap Q\} \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s+3}}\right) \operatorname{osc}\{w, Q_\rho \cap Q\}.$$

证 $\widetilde{Q}_{\rho/4} \cap \Gamma \neq \varnothing$ 结合外锥条件得出

$$\operatorname{mes}\{K(\rho_1) \backslash [K(\rho_1) \cap \Omega]\} \geqslant b_1\rho_1^n \text{ 或 } t^0 - a\xi\rho^2 \leqslant 0,$$

故可应用引理 2′，

情况 (i) $\operatorname{osc}\{w \mid Q_\rho \cap Q\} \leqslant 2^{s+2}\rho^{\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1)$，

$$\Rightarrow \operatorname{osc}\{w, \widetilde{Q}_{\rho/4} \cap Q\} \leqslant 2^{s+2}\rho^{\varepsilon}.$$

情况 (ii) 结合引理 3、4 得：

$$\int_{t^0 - a\xi\rho^2}^{t^0} \operatorname{mes} A_{\mu-\omega/2^{s+1}}(t)\,dt \leqslant \theta_1\xi\rho_1^{n+2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{mes} A_{\mu-\omega/2^{s+3}, \rho_3}(t) = 0,\quad t \in \left[t^0 - \frac{a}{16}\xi\rho^2, t^0\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{osc}\{w, \tilde{Q}_{\rho/4}\cap Q\} \leqslant \left(1-\frac{1}{2^{s+3}}\right)\operatorname{osc}\{w, Q_\rho\cap Q\},$$

其它情况 (iii)、(ii)′、(iii)′ 也得到同样的结果．引理证毕．

在证明 Hölder 条件时还需要有一个关于非蜕化抛物方程的解满足 Hölder 条件的引理．抛物方程的解在 $u \geqslant M_1 = e^{-AT}\cdot \min\{\inf\limits_{Q} u_0(x), \inf\limits_{\partial\Omega\times(0,T)} \phi(s,t)\}$ 之下总是非蜕化的，但从 u 要满足与 M_1 无关的 Hölder 条件来说，上述性质没有用处，有用的是下面的引理．

引理 6 设 ρ_0 满足 $0<\rho_0<1$，$mM^{1-1/m}\Phi'(M)\rho_0<1$．设 $Q_{\rho_0}\subset Q$，$u(x,t)$ 于 $Q_{\rho_0}=\{(x,t)\,|\,|x-x^0|<\rho_0, t^0-a\Phi'(\rho_0^\varepsilon)\rho_0^2<t\leqslant t^0\}$ 中为方程的经典解，满足 $0<u(x,t)\leqslant M$．记 $w(x,t)=\int_0^{u(x,t)} v(s)ds$，$\mu_0=\sup\limits_{Q_{\rho_0}}\{w(x,t)\}$，$\tilde{\mu}_0=\inf\limits_{Q_{\rho_0}}\{w(x,t)\}$，$\omega_0=\mu_0-\tilde{\mu}_0$．设

$$\omega_0\leqslant \hat{C}\rho_0^\varepsilon,\quad \mu_0\geqslant 2\hat{C}\rho_0^\varepsilon,$$

其中 ε，$\hat{C}$ 为常数，满足 $0<\varepsilon=\varepsilon(n,m,\Lambda,M,T)\leqslant 1/2$，$\hat{C}=\hat{C}(n,m,\Lambda,M,T)\geqslant 1$，则有:

$$|w(x,t)-w(x^0,t^0)|\leqslant C_1\hat{C}(|x-x^0|^2+|t-t^0|)^{\varepsilon_0/2},$$

$$(x,t)\in Q_{\rho_0},$$

其中 C_1，ε_0 仅依赖于 n，m，Λ，T，M 且 $\varepsilon_0\leqslant\varepsilon/4$．

证 做变换 $x'=(x-x^0)/\rho_0$，$t'=(t-t^0)/[a\rho_0^2\Phi'(\mu_0)]$，则区域 Q_{ρ_0} 映到

$$Q_1'=\left\{(x',t')\,\middle|\,|x'|<1,\ -\frac{\Phi'(\rho_0^\varepsilon)}{\Phi'(\mu_0)}<t'\leqslant 0\right\}.$$

记 $v(x',t')=u(x,t)$，则 $v(x',t')$ 满足方程

$$\frac{\partial v}{\partial t'}=\sum\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(A_{ij}(x',t')\frac{\partial v}{\partial x_j'}\right)+\sum B_i(x',t')\frac{\partial v}{\partial x_i'}+C(x',t')v$$

于 Q_1'，其中

$$A_{ij}(x',t')=a\Phi'(\mu_0)a_{ij}(x,t,v),$$

$$B_i(x',t') = a\Phi'(\mu_0)\rho_0 b_i(x,t,v),$$
$$C(x',t') = a\Phi'(\mu_0)\rho_0^2 c(x,t,v).$$

由引理的条件得到 $\mu_0 \geqslant w \geqslant \tilde{\mu}_0 \geqslant \mu_0/2$，因此

$$\sum A_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant a\Phi'(\mu_0)\frac{1}{\Lambda}\nu(v)|\xi|^2 = \frac{a\Phi'(\mu_0)}{\Lambda\Phi'(w)}|\xi|^2$$

$$\geqslant \frac{a}{\Lambda m 2^{1-1/m}}|\xi|^2,$$

$$\sum A_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant a\Phi'(\mu_0)\Lambda\nu(v)|\xi|^2 \leqslant a\Lambda m|\xi|^2,$$

$B_i(x',t')$ 与 $C(x',t')$ 均为有界.

由非蜕化抛物方程解的内估计得到，$\exists\, C_0 > 0$ 与 $\alpha \in (0,1)$ 使

$$|v(x',t') - v(0,0)| \leqslant C_0(|x'|^\alpha + |t'|^{\alpha/2})$$

对 $(x',t') \in Q_{1/2} = \{(x',t')\,|\,|x'| < 1/2,\ -1/(2m) < t' \leqslant 0\}$ 成立，其中 C_0, α 仅依赖于 n, m, M, Λ, T，故得:

$$|u(x,t) - u(x^0,t^0)| \leqslant C_0\left\{\frac{|x-x^0|^\alpha}{\rho_0^\alpha} + \frac{|t-t^0|^{\alpha/2}}{[a\rho_0^2\Phi'(\mu_0)]^{\alpha/2}}\right\}$$

于 $\{(x,t)\,|\,|x-x^0| < \rho_0/2,\ t^0 - (a/2m)\Phi'(\mu_0)\rho_0^2 < t \leqslant t^0\}$ 成立. 故在区域 $(x,t) \in \Sigma = \{(x,t)\,|\,|x-x^0| < \rho_0^2/4,\ t^0 - [(a/2m)\Phi'(\mu_0)\rho_0^2]^2 < t \leqslant t^0\}$ 内有:

$$|u(x,t) - u(x^0,t^0)| \leqslant C_0(|x-x^0|^{\alpha/2} + |t-t^0|^{\alpha/4})$$
$$\leqslant 2C_0(|x-x^0|^2 + |t-t^0|)^{\alpha/4}.$$

于 $(x,t) \in Q_{\rho_0}\backslash\Sigma$ 内有

$$(|x-x^0|^2 + |t-t^0|)^{1/4} \geqslant \min\{\rho_0/2,\ [(a/2m)\Phi'(\mu_0)\rho_0^2]^{1/2}\}$$
$$\geqslant \min\{1/2,\ [(a/2m^2)\Phi'(M)]^{1/2}\}\rho_0$$
$$\geqslant \min\{1/2,\ [(a/2m^2)\Phi'(M)]^{1/2}\}\cdot(\hat{C}^{-1}\omega)^{1/\varepsilon},$$

上面最后不等式的成立，是用了引理的条件 $\omega \leqslant \omega_0 \leqslant \hat{C}\rho_0^\varepsilon$. 由上式得到

$$\omega \leqslant \max\left\{2,\left[\frac{2m^2}{a\Phi'(M)}\right]^{1/2}\right\}^\varepsilon \hat{C}(|x-x^0|^2 + |t-t^0|)^{\varepsilon/4},$$

$$(x, t) \in \bar{Q}_{\rho_0} \backslash \Sigma.$$

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}\min(\alpha, \varepsilon)$, $C_1 = \max\left\{2C_0, 2^{\varepsilon}, \left[\frac{2m^2}{a\Phi'(M)}\right]^{\varepsilon/2}\right\}$, 引理得证.

定理 7（内估计） 设方程 $u_t = \sum(a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + \sum b_i u_{x_i} + cu$ 的系数 $a_{ij}(x, t, u)$, $b_i(x, t, u)$, $c(x, t, u)$ 满足

$$\frac{1}{\Lambda}\nu(|r|)|\xi|^2 \leqslant \sum a_{ij}(x, t, r)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda\nu(|r|)|\xi|^2,$$

$$\forall \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

$$|b_i(x, t, r)| \leqslant \Lambda, \ \Sigma\left|\frac{\partial b_i(x, t, r)}{\partial x_i}\right| \leqslant \Lambda,$$

$$-\Lambda \leqslant c(x, t, r) \leqslant 0, \ (x, t, r) \in \bar{Q} \times \boldsymbol{R},$$

且 $\nu(0) = 0$, $\nu(r) > 0\ (r > 0)$, $1 \leqslant \frac{r\nu(r)}{\int_0^r \nu(s)ds} \leqslant m(0<r<\infty)$. $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$, $0 < u \leqslant M$, u 为方程的解, $w = \int_0^u \nu(s)ds$. $\forall (x^0, t^0) \in Q$, 记 $\rho_0 = \min\left\{1, \frac{1}{mM^{1-1/m}\Phi'(M)}, d_{x^0}, \left[\frac{mt^0}{a\Phi'(1)}\right]^{1/2}\right\}$, 其中 $d_{x^0} = d(x^0, \partial\Omega)$. 则

$$\forall (x, t) \in Q^*_{\rho_0} = \{(x, t) \mid |x - x^0| < \rho_0,$$
$$t^0 - a/m\Phi'(1)\rho_0^2 < t \leqslant t^0\}$$

有:

$$|w(x, t) - w(x^0, t^0)| \leqslant \frac{C}{\rho_0}(|x - x^0|^2 + |t - t^0|)^{\alpha/2},$$

其中正常数 C, α 仅依赖于 n, m, Λ, M, T.

证 令

$$\hat{C} = \max\left\{(2^{s+8}m^3)^m, \frac{4}{\rho_0}\int_0^M \nu(s)ds\right\}, \ \tau = 64m^3\hat{C}^{1-1/m},$$

其中 s 由引理 5 取定. 取 ε 满足

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, \ \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\varepsilon} \geqslant 1 - 2^{-1-\varepsilon(s+3)/16}.$$

记

$$\rho_l=\frac{\rho_0}{\tau^l}\quad(l=0,1,2,\cdots),$$

$$Q_l=\{(x,t)\,|\,|x-x^0|<\rho_l,\ t^0-a\Phi'(\rho_l^\varepsilon)\rho_l^2<t\leqslant t^0\},$$

$$\mu_l=\sup_{Q_l}w(x,t),\ \tilde{\mu}_l=\inf_{Q_l}w(x,t),\ \omega_l=\mu_l-\tilde{\mu}_l,$$

$$l^*=\min_{l\geqslant 0}\{l\,|\,\mu_l\geqslant 2\hat{C}\rho_l^\varepsilon\}$$

注意到由于 $\inf\limits_Q u(x,t)\geqslant M_1$，故当 l 大时，总有 $\mu_l\geqslant M_1\geqslant 2\hat{C}\rho_l^\varepsilon$，即 l^* 为有限数．但 Hölder 条件要与 l^* 无关．

由于

$$\omega_0\leqslant\int_0^M\nu(s)ds\leqslant\frac{\hat{C}}{4}\rho_0\leqslant\hat{C}\rho_0^\varepsilon,$$

如果 $l^*=0$，即 $\mu_0\geqslant 2\hat{C}\rho_0^\varepsilon$，则应用引理 6 得到定理的结论．今设 $l^*>0$，证明 $\omega_l\leqslant\hat{C}\rho_l^\varepsilon(l\leqslant l^*)$ 为成立．

用归纳法证明．设上式当 l 时已真 $(l<l^*)$，要证对 $l+1$ 为真．

如果有 $\mu_l\leqslant 2\rho_l^\varepsilon$，则 $\omega_{l+1}\leqslant\mu_l\leqslant\hat{C}\rho_{l+1}^\varepsilon$．因此设 $\mu_l\geqslant 2\rho_l^\varepsilon$，即 $\omega_l\leqslant\hat{C}\rho_l^\varepsilon$，$2\rho_l^\varepsilon\leqslant\mu_l\leqslant 2\hat{C}\rho_l^\varepsilon$，这时引理 5 可用，因为引理 1—5 都是在假设 $\mu\geqslant 2\rho^\varepsilon$ 之下为成立．

区分两种情况：

情况1．$\max\limits_{t\in[t^0-a\eta\rho_l^2,\,t^0-a\xi\rho_l^2]}\operatorname{mes}B_{\mu_l+\omega_l/2,\rho_{1l}}(t)\leqslant\frac{\kappa_n}{2}\rho_{1l}^n$，其中 $\eta=\Phi'(\rho_l^\varepsilon)$，$\xi=\frac{1}{m^2}\Phi'(\mu_l)$，$\rho_{il}=\left[1-\frac{i}{3}(1-2^{-1/n})\right]\rho_l$ $(i=1,2,3)$．由引理 5 得，或者是 $\omega_l\leqslant 2^{s+2}\rho_l^\varepsilon$，该条件下得到：

$$\omega_{l+1}\leqslant\omega_l\leqslant 2^{s+2}\rho_l^\varepsilon\leqslant 2^{s+2}\tau\rho_{l+1}^\varepsilon=2^{s+2}64m^3\hat{C}^{1-1/m}\rho_{l+1}^\varepsilon\leqslant\hat{C}\rho_{l+1}^\varepsilon,$$

或者是

$$\operatorname{osc}\left\{w,\frac{\tilde{Q}_{\rho_l}}{4}\right\}\leqslant\left(1-\frac{1}{2^{s+3}}\right)\operatorname{osc}\{w,Q_{\rho_l}\}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{\tau}\right)^\varepsilon\hat{C}\rho_l^\varepsilon=\hat{C}\rho_{l+1}^\varepsilon.$$

又

$$Q_{l+1}=\{(x,t)\,|\,|x-x^0|<\rho_{l+1},\ t^0-a\Phi'(\rho_{l+1}^\varepsilon)\rho_{l+1}^2<t\leqslant t^0\}$$

$$\subseteq\widetilde{Q}_{\rho_{l/4}}=\left\{(x,t)\,|\,x\in K(\rho_l/4),\ t^0-\frac{a}{m^2}\Phi'(\mu_l)\left(\frac{\rho_l}{4}\right)^2<t\leqslant t^0\right\},$$

这是因为

$$\rho_{l+1}=\frac{\rho_l}{\tau}<\frac{\rho_l}{4},$$

$$\frac{1/m^2\Phi'(\mu_l)(\rho_l/4)^2}{\Phi'(\rho_{l+1}^\varepsilon)\rho_{l+1}^2}\geqslant\frac{\tau^2}{16m^3}\left(\frac{\rho_{l+1}^\varepsilon}{\mu_l}\right)^{1-1/m}\geqslant\frac{\tau^2}{16m^3}(2\hat{C}\tau^\varepsilon)^{1/m-1}$$

$$\geqslant\frac{\tau^{1+1/m}}{32m^3\hat{C}^{1-1/m}}\geqslant 2,$$

因此有:

$$\omega_{l+1}\leqslant\hat{C}\rho_{l+1}^\varepsilon.$$

情况2. $\exists\,\bar{t}\in[t^0-a\eta\rho_l^2,\ t^0-a\xi\rho_l^2]$ 使

$$\text{mes}\,A_{\mu_l-\omega_l/2,\rho_{1l}}(\bar{t})\leqslant\frac{\kappa_n}{2}\rho_{1l}^n,$$

区间 $[\bar{t},t^0]$ 分为N等分使 $\frac{a}{2}\xi\rho_l^2\leqslant\frac{t^0-\bar{t}}{N}\leqslant a\xi\rho_l^2$，则

$$N\leqslant\frac{a\eta\rho_l^2}{a\xi\rho_l^2/2}\leqslant 2m^2\frac{\Phi'(\rho_l^\varepsilon)}{\Phi'(\mu_l)}\leqslant 2m^3(2\hat{C})^{1-1/m}$$

$$\leqslant 4m^3\hat{C}^{1-1/m}=\frac{\tau}{16},$$

记 $t_p=\bar{t}+\frac{p-1}{N}(t^0-\bar{t})$ $(p=1,2,\cdots,N)$ 及 $t_{N+1}=t^0$.

应用引理 5 于区间 $[t_1,t_2]$ 得:

$$\text{mes}\,A_{\mu-\omega/2^{s+4},\rho_3}(t_2)=0\quad(\text{略去下标 } l),$$

$$\text{mes}\,A_{\mu-\omega/2^{s+4},\rho_1}(t_2)\leqslant\text{mes}\,A_{\mu-\omega/2^{s+4},\rho_3}(t_2)+\kappa_n(\rho_1^n-\rho_3^n)$$

$$\leqslant\frac{\kappa_n}{2}\rho_1^n,$$

重复这一做法得:

$$\text{mes}\ A_{\mu-\omega/2^{[(s+3)(N+1)+1]},\rho_1}(t_N) \leqslant \frac{\kappa_n}{2}\rho_1^n,$$

以及

$$\text{mes}\ A_{\mu-\omega/2^{[(s+3)N+1]},\rho_3}(t) = 0,\quad t \in \left[t^0 - \frac{a}{32}\xi\rho^2,\ t^0\right],$$

由于$N \leqslant \tau/16$，因此得到:

$$\omega_{l+1} \leqslant \left[1 - \frac{1}{2^{(s+3)N+1}}\right]\omega_l \leqslant \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\varepsilon}\hat{C}\rho_l^{\varepsilon} = \hat{C}\rho_{l+1}^{\varepsilon}.$$

因此归纳法成立，我们得到$\omega_{l^*}^* \leqslant \hat{C}\rho_{l^*}^{\varepsilon}$. 又由$l^*$的定义得$\mu_{l^*} \geqslant 2\hat{C}\rho_{l^*}^{\varepsilon}$. 应用引理6得到，于$(x,t)\in Q_{l^*}$定理的结论成立.

当$(x,t)\in Q_l\backslash Q_{l+1}$ $(0 \leqslant l < l^*)$时，由$\omega_l \leqslant \hat{C}\rho_l^{\varepsilon}$得到:

$$(|x-x^0|^2 + |t-t^0|)^{1/2} \leqslant \min\{\rho_{l+1}, [a\Phi'(\rho_{l+1}^{\varepsilon})\rho_{l+1}^2]^{1/2}\}$$

$$\geqslant \min\left\{1, \left[\frac{a}{m}\Phi'(M)\right]^{1/2}\right\}\rho_{l+1}$$

$$\geqslant \min\left\{1, \left[\frac{a}{m}\Phi'(M)\right]^{1/2}\right\}\frac{1}{\tau}\left(\frac{\omega_l}{\hat{C}}\right)^{1/\varepsilon},$$

因此

$$|w(x,t) - w(x^0,t^0)|$$
$$\leqslant \tau^{\varepsilon}\max\left\{1, \left[\frac{m}{a\Phi'(M)}\right]^{\varepsilon/2}\right\}\hat{C}(|x-x^0|^2 + |t-t^0|)^{\varepsilon/2},$$

综合上述结果，得到定理的结论. 证毕.

定理8（近边估计） 除了定理7的假设而外，再设$\partial\Omega$满足外锥条件，且设解$u(x,t)$满足$0 < u \leqslant M$及$u|_{\Gamma}\in C^{\varepsilon_1,\varepsilon_1/2}(\Gamma)$ $(\varepsilon_1 > 0)$，则$\forall(x^0,t^0)\in\bar{Q}$及$(x,t)\in Q_{\rho_0}^*\cap Q$，其中$\rho_0 = a_0$为外锥条件中的常数，又

$$Q_{\rho_0}^* = \left\{(x,t)\,\middle|\,|x-x^0| < \rho_0,\ t^0 - \frac{a}{m}\Phi'(1)\rho_0^2 < t \leqslant t^0\right\},$$

则有

$$|w(x,t) - w(x^0,t^0)| \leqslant C(|x-x^0|^2 + |t-t^0|)^{\alpha/2},$$

其中C, α仅依赖于n, m, Λ, M, T, ε_1, $\|u\|_{C^{\varepsilon_1,\varepsilon_1/2}(\Gamma)}$及$\theta_0$, a_0（后二者为外锥条件中的常数）.

证 取 $\rho_0 = a_0$，再取定 $\hat{C}, \tau, \varepsilon$ 如定理 1，还要限定 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$.

先设 $(x^0, t^0) \in Q$，当 $Q_{\rho_0} \subset Q$ 时，由定理 1 得出 Hölder 不等式.

当 $Q_{\rho_0} \cap \Gamma \neq \varnothing \Rightarrow \exists\, l_0 \geqslant 1$ 使 $Q_{l_0-1} \cap \Gamma \neq \varnothing$，$Q_{l_0} \cap \Gamma = \varnothing$. 我们要证明

$$\omega_l \leqslant \hat{C}\rho_l^\varepsilon \quad (l \leqslant l_0 - 1).$$

用归纳法证明，即设上面断言当 l 时为真，要推出 $l+1$ 时为真. 如有 $\mu_l \leqslant 2\rho_l^\varepsilon$，则

$$\omega_{l+1} \leqslant \mu_l \leqslant \hat{C}\rho_{l+1}^\varepsilon.$$

当 $\mu_l > 2\rho_l^\varepsilon$ 时，应用引理 5′ 得到，或者是

$$\operatorname{osc}\{w, \widetilde{Q}_{\rho_l/4} \cap Q\} \leqslant 2^{s+2}\rho_l^\varepsilon,$$

$$\omega_{l+1} \leqslant \operatorname{osc}\{w, \widetilde{Q}_{\rho_l/4} \cap Q\} \leqslant 2^{s+2}\rho_l^\varepsilon \leqslant 2^{s+2}\tau\rho_{l+1}^\varepsilon$$

$$= 2^{s+2}64m^3\hat{C}^{1-1/m}\rho_{l+1}^\varepsilon \leqslant \hat{C}\rho_{l+1}^\varepsilon,$$

或者是

$$\omega_{l+1} \leqslant \operatorname{osc}\{w, \widetilde{Q}_{\rho_l/4} \cap Q\} \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^{s+3}}\right)\operatorname{osc}\{w, Q_{\rho_l} \cap Q\}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{s+3}}\right)\omega_l \leqslant \left(\frac{1}{\tau}\right)^\varepsilon \hat{C}\rho_l^\varepsilon = \hat{C}\rho_{l+1}^\varepsilon,$$

总之归纳法的断言可由 l 推到 $l+1$，故由 $\omega_0 \leqslant \hat{C}\rho_0^\varepsilon$ 得:

$$\omega_{l_0} = \operatorname{osc}\{w, Q_{l_0} \cap Q\} \leqslant \hat{C}\rho_{l_0-1}^\varepsilon = \widetilde{C}\rho_{l_0}^\varepsilon \quad (\text{其中 } \widetilde{C} = \hat{C}\tau^\varepsilon),$$

由 $l^* = \min\limits_{l \geqslant l_*}\{l \mid \mu_l \geqslant 2\hat{C}\rho_l^\varepsilon\}$ 定出 l^*，仿定理 7 得到定理 8 的结论.

取极限得到: $\forall (x^0, t^0) \in \overline{Q}$，Hölder 估计仍成立. 定理得证.

由 $w(x, t)$ 的 Hölder 条件估计可导出 $u(x, t)$ 也满足 Hölder 条件. 这是因为: 设 $w_1 \leqslant w_2$，由 $\dfrac{\Phi(w_1)}{\Phi(w_2)} \geqslant \dfrac{w_1}{w_2}$ 得:

$$\frac{\Phi(w_2) - \Phi(w_1)}{\Phi(w_2)} \leqslant \frac{w_2 - w_1}{w_2},$$

$$\Phi(w_2) - \Phi(w_1) \leqslant \frac{\Phi(w_2)}{w_2}(w_2 - w_1),$$

由 $\frac{1}{mw} \leqslant \frac{\Phi'(w)}{\Phi(w)}$ 得 $\frac{\Phi(w_2)}{w_2} \leqslant m\Phi'(w_2)$. 因此

$$\Phi(w_2) - \Phi(w_1) \leqslant m\Phi'(w_2)(w_2 - w_1)$$
$$\leqslant m^2\Phi'(M)M^{1-1/m}\frac{w_2 - w_1}{w_2^{1-1/m}}$$
$$\leqslant m^2\Phi'(M)M^{1-1/m}(w_2 - w_1)^{1/m}.$$

由于 Φ 是 w 的单调函数,故由上式得到

$$|u_2(x,t) - u_1(x,t)| \leqslant m^2\Phi'(M)M^{1-1/m}|w_2 - w_1|^{1/m},$$

这式子的成立已不必假定 $w_1 \leqslant w_2$ 了. 由此式及 w 满足 Hölder 条件,得到 u 也满足 Hölder 条件.

§2 第一边值问题解的存在性

考察第一边值问题

$$\begin{cases} u_t = \sum(a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + \sum b_i u_{x_i} + cu, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \\ u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = \phi(s,t) \end{cases}$$

的广义解. 设 u_0, ϕ 为连续, 满足连接条件 $u_0|_{\partial\Omega} = \phi|_{t=0}$, 又 $u_0(x) \geqslant 0$, $\phi(s,t) \geqslant 0$. $u(x,t)$ 称为上述第一边值问题的广义解: 当 $u(x,t) \in C(\bar{Q})$, $u(x,t) \geqslant 0$, 按普通意义满足初、边值, 按下面的广义满足方程:

$\forall\varphi(x,t) \in C^{2,1}(Q) \cap C'(\bar{Q})$, $\varphi|_{t=T} = 0 (x \in \Omega)$, $\varphi|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0$,

$$\int_Q \{u\varphi_t + \sum A_{ij}(x,t,u)\varphi_{x_ix_j} - \sum[A_i(x,t,u) + B_i(x,t,u)]\varphi_{x_i}$$
$$+ [c(x,t,u) + B(x,t,u)]\varphi\}dx\,dt + \int_\Omega u_0(x)\varphi(x,0)dx$$
$$- \int_{\partial\Omega\times[0,T]} \sum A_{ij}(s,t,\phi(s,t))\frac{\partial\varphi(s,t)}{\partial N}$$
$$\cdot \cos(N,x_i)\cos(N,x_j)ds\,dt = 0,$$

其中 N 为 $\partial\Omega$ 的外法线,而

$$A_{ij}(x,t,r)=\int_0^r a_{ij}(x,t,s)ds,$$

$$A_i(x,t,r)=\int_0^r \sum \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x,t,s)ds,$$

$$B_i(x,t,r)=\int_0^r b_i(x,t,s)ds,$$

$$B(x,t,r)=\int_0^r \sum \frac{\partial b_i}{\partial x_i}(x,t,s)ds.$$

设方程系数与区域Ω满足条件:

(i) $a_{ij}(x,t,r)$, $b_i(x,t,r)$, $c(x,t,r)$, $\sum \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x,t,r)$, $\sum \frac{\partial b_i}{\partial x_i}(x,t,r) \in C$ 于 $\bar{Q}\times \boldsymbol{R}$, $(1\leqslant i,j\leqslant n)$.

(ii) $\frac{1}{\Lambda}\nu(|r|)|\xi|^2 \leqslant \sum a_{ij}(x,t,r)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda\nu(|r|)|\xi|^2$, $\forall \xi \in \boldsymbol{R}^n$, $\forall (x,t,r)\in \bar{Q}\times \boldsymbol{R}$, 其中$\Lambda$为常数,而$\nu(r)$满足条件$\nu(r)\in C[0,\infty)$, $\nu(0)=0$, $\nu(r)>0\ (r>0)$, $\exists\, \delta>0$, $m>1$, $\ni$

$$1\leqslant \frac{r\nu(r)}{\int_0^r \nu(s)ds}\leqslant m \quad (0<r\leqslant \delta).$$

(iii) $\partial\Omega \in C^{1+\beta_0}(\beta_0>0)$.

定理 9 在上述条件下, 再加上$\exists\, \beta>0$使$u_0(x)\in C^{\beta}(\bar{\Omega})$, $\psi(s,t)\in C^{\beta,\beta/2}(\partial\Omega\times[0,T])$, 则第一边值问题的广义解为存在,且$u$于$\bar{Q}$中满足Hölder条件.

证 令

$$\bar{u}_{0k}(x)=\begin{cases} u_0(x), & u_0(x)>\frac{1}{k},\\ \frac{1}{k}, & 0\leqslant u_0(x)\leqslant \frac{1}{k}; \end{cases}$$

$$\Phi_k(s,t)=\begin{cases} \psi(s,t), & \psi(s,t)>1/k,\\ 1/k, & 0\leqslant \psi(s,t)\leqslant 1/k. \end{cases}$$

作$\bar{u}_{0k}$的光滑化函数逼近 (先延拓$\bar{u}_{0k}$于$\bar{\Omega}$外, 使仍保持为

$C^{\beta})u_{0k}(x)$，使 $|\bar{u}_{0k}(x)-u_{0k}(x)|\leqslant\frac{1}{k}\nu\left(\frac{1}{k}\right)$.

延拓 $\phi_k(s,t)-\phi(s,0)$ 于 $\partial\Omega\times[0,T]$ 外，使仍保持为 $C^{\beta,\beta/2}$（在 $t=0$ 处作奇延拓），作它的光滑化函数逼近，再添加 $\bar{u}_{0k}(s)$ 得到 $\phi_k(s,t)$，可做到 $|\bar{\phi}_k(s,t)-\phi_k(s,t)|\leqslant\frac{2}{k}\nu\left(\frac{1}{k}\right)$.

$$\bar{a}_{ij}(x,t,r)=a_{ij}(x,t,r)/\nu(r),\ b_i(x,t,r),\ c(x,t,r)$$

延拓到 $\bar{\Omega}$ 外邻近，使它们及 $\sum\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}$，$\sum\frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ 保持为连续，$\bar{a}_{ij}$，b_i，c 用光滑化函数逼近，得到 $\bar{a}_{ij\varepsilon}(x,t,r)$，$b_{i\varepsilon}(x,t,r)$，$c_\varepsilon(x,t,r)$.

$\nu(r)$ 的光滑逼近要做得更细致一些如下．记

$$\frac{r\nu(r)}{\int_0^r\nu(s)ds}=\alpha(r),$$

则有：

$$\nu(r)=\int_0^1\nu(s)ds\frac{\alpha(r)}{r}\exp\left[\int_1^r\alpha(s)\frac{ds}{s}\right],$$

且 $1\leqslant\alpha(r)\leqslant m$，$\alpha(r)\in C[0,\infty)$．作出 $\alpha(r)$ 的光滑逼近 $\alpha_\varepsilon(r)$ 使

$$|\alpha_\varepsilon(r)-\alpha(r)|\leqslant\frac{\varepsilon}{(\log r)^2+1}.$$

作法为：记 $\alpha(\log r)=\beta(r)$，则 $\beta(r)\in C(-\infty,\infty)$．$\forall\varepsilon>0$，有 $\delta_{k\varepsilon}(k=1,2,\cdots)$ 使

$$|\beta(s)-\beta(s^*)|\leqslant\frac{\varepsilon}{k^2+1},\ \forall|s|\leqslant k,\ |s-s^*|\leqslant\delta_{k\varepsilon}.$$

设 $\sigma(s)$ 为 $s\in[0,\infty)$ 的 C^∞ 单调减少函数，满足

$$\sigma(k-1)=\delta_{k\varepsilon}\quad(k=1,2,\cdots).$$

设 $\beta_\varepsilon(s)$ 为 $\beta(s)$ 与光滑化子的卷积，光滑化子半径为 $\sigma(s)$，则 $\beta_\varepsilon(s)\in C^\infty(-\infty,\infty)$ 且

$$\beta_\varepsilon(s)=\frac{1}{K(s)}\int_{|\tau|<\sigma(s)}\beta(s-\sigma)\exp\left\{\left[\frac{\tau^2}{\sigma(s)^2}-1\right]^{-1}\right\}d\tau,$$

其中

$$K(s)=\int_{|\tau|\leqslant\sigma(s)}\exp\left\{\left[\frac{\tau^2}{\sigma(s)^2}-1\right]^{-1}\right\}d\tau.$$

当 $k-1\leqslant|s|\leqslant k$ 时有

$$|\beta_\varepsilon(s)-\beta(s)|=\left|\frac{1}{K(s)}\int_{|\tau|\leqslant\sigma(s)}[\beta(s-\sigma)-\beta(s)]\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left\{\left[\frac{\tau^2}{\tau(s)^2}-1\right]^{-1}\right\}d\sigma\right|\leqslant\max_{|s^*-s|\leqslant\sigma(s)}|\beta(s^*)-\beta(s)|$$

$$\leqslant\max_{|s|\leqslant k,|s^*-s|\leqslant\delta_{k\varepsilon}}|\beta(s^*)-\beta(s)|\leqslant\frac{\varepsilon}{k^2+1}\leqslant\frac{\varepsilon}{s^2+1},$$

取 $\alpha_\varepsilon(r)=\beta_\varepsilon(e^r)$ 即可.

记

$$\nu_\varepsilon(r)=\int_0^1\nu(s)ds\frac{d_\varepsilon(r)}{r}\exp\left[\int_1^r\alpha_\varepsilon(s)\frac{ds}{s}\right],$$

易知有

$$\nu_\varepsilon(r)\in C[0,\infty),\ \nu_\varepsilon(0)=0,\ \nu_\varepsilon(r)\in C^\infty(0,\infty),$$

$$1\leqslant\frac{r\nu_\varepsilon(r)}{\int_0^r\nu_\varepsilon(s)ds}\leqslant m,\quad\frac{1}{m}e^{-\pi/2}\leqslant\frac{\nu_\varepsilon(r)}{\nu(r)}\leqslant me^{\pi/2}.$$

令 $a_{ij\varepsilon}(x,t,r)=\bar{a}_{ij\varepsilon}(x,t,r)\nu_\varepsilon(r)$. 解下列第一边值问题:

$$\begin{cases}u_t=\sum(a_{ij\varepsilon}u_{x_j})_{x_i}+\sum b_{i\varepsilon}u_{x_i}+c_\varepsilon u,\\ u|_{t=0}=u_{0k}(x),\\ u|_{\partial\Omega\times[0,T]}=\phi_k(s,t),\end{cases}$$

由极值原理知

$$\frac{e^{-2AT}}{k}\leqslant u\leqslant M=e^{2AT}\max\{\sup_\Omega u_0(x),\sup_{\partial\Omega\times[0,T]}\phi(s,t)\},$$

因此这是非蜕化的初、边值问题，它的解 $u_{k\varepsilon}$ 存在(先对区域与初、边值作光滑逼近，得出逼近解列，选子列内闭二阶收敛，取初、边值用闸函数去证）且 $u_{k\varepsilon}\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$. 由定理 7、8 得 $u_{k\varepsilon}\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})$，其中 α，$\|u\|_{C^{\alpha,\alpha/2}}$ 与 k，ε 无关. 由第一章的估计得

到 $u_{k\varepsilon}\in C^{1+\alpha,1}(\bar{Q})$，其中 $\|u_{k\varepsilon}\|_{C^{1+\alpha,1}}$ 与 ε 无关. 先选子列 $\{u_{k\varepsilon_i}\}$ 使 $u_{k\varepsilon_i}\to u_k$，$\forall(x,t)\in\bar{Q}$. u_k 取初、边值 $u_{0k}(x)$、$\psi_k(s,t)$ 并满足广义解关系式 (但 $u_0(x)$、$\psi(s,t)$ 是用 $u_{0k}(x)$、$\psi_k(s,t)$ 代替的)，且 $e^{-2AT}/k\leqslant u_k\leqslant M$，$u_k\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})$，$\|u_k\|_{C^{\alpha,\alpha/2}}$ 与 k 无关，故 $\{u_k\}$ 又于 $C(\bar{Q})$ 为紧，再可选子列(子列仍可记为 u_k) 收敛于 u，则 u 取初、边值 $u_0(x)$、$\psi(s,t)$ 及满足广义解的关系式. 又 $u\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})$. 定理证毕.

§3 解的唯一性

再考察广义解的唯一性问题. 如又有非负解 $\tilde{u}(x,t)\in C(\bar{Q})$，仍取初、边值 $u_0(x)$，$\psi(s,t)$ 满足广义解关系式. 因而 $\forall\varphi\in C^{2,1}(Q)\cap C^1(\bar{Q})$，$\varphi|_{t=T}=\varphi|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0$ 有

$$\int_Q(u_k-\tilde{u})[\varphi_t+\sum a_{ij}^{(k)}(x,t)\varphi_{x_ix_j}+\sum b_i^{(k)}(x,t)\varphi_{x_i}$$
$$+c^{(k)}(x,t)\varphi]dxdt+\int_\Omega[u_{0k}(x)-u_0(x)]\varphi(x,0)dx$$
$$-\int_{\partial\Omega\times[0,T]}(\psi_k-\psi)\sum a_{ij}^{(k)}(s,t)\frac{\partial\varphi}{\partial N}\cos(N,x_i)$$
$$\cdot\cos(N,x_j)dsdt=0 \tag{7}$$

其中

$$a_{ij}^{(k)}=\frac{A_{ij}(x,t,u_k)-A_{ij}(x,t,\tilde{u})}{u_k-\tilde{u}}=\int_0^1 a_{ij}(x,t,\theta u_k$$
$$+(1-\theta)\tilde{u})d\theta,$$
$$b_i^{(k)}=-\int_0^1\left(\sum\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}+b_i\right)(x,t,\theta u_k+(1-\theta)\tilde{u})d\theta,$$
$$c^{(k)}=\cdots.$$

设 $\tilde{u}_\varepsilon$ 为 $\tilde{u}$ 的光滑逼近，满足条件 $\tilde{u}\leqslant\tilde{u}_\varepsilon\leqslant\tilde{u}+\varepsilon$. 记

$$a_{ij}^{(k,\varepsilon)}=\int_0^1 a_{ij\varepsilon}(x,t,\theta u_k+(1-\theta)\tilde{u}_\varepsilon)d\theta,$$
$$b_i^{(k,\varepsilon)}=\cdots,\quad c^{(k,\varepsilon)}=\cdots.$$

解初、边值问题

$$\begin{cases}\varphi_t+\sum a_{ij}^{(k,\varepsilon)}\varphi_{x_ix_j}+\sum b_i^{(k,\varepsilon)}\varphi_{x_i}+c^{(k,\varepsilon)}\varphi=U(x,t),\\ \varphi|_{t=T}=\varphi|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0,\end{cases}$$

其中 $U(x,t)$ 为任何于 $\bar{Q}$ 为光滑的函数. 由于 $u_k\in C^{2,1}(Q)\cap C^{1+\alpha,1}(\bar{Q})$, 故 $a_{ij}^{(k,\varepsilon)}$, $b_i^{(k,\varepsilon)}$, $c^{(k,\varepsilon)}\in C^{2,1}(Q)\cap C^{1+\alpha,1}(\bar{Q})$, 因此 $\varphi^{(k,\varepsilon)}\in C^{2,1}(Q)\cap C^{1+\alpha,1}(\bar{Q})$. 于 (7) 中取 $\varphi=\varphi^{(k,\varepsilon)}$, 结合上述定解问题得到:

$$\begin{aligned}&\int_Q[u(x,t)-\tilde{u}(x,t)]U(x,t)dxdt\\&=\int_Q(u-u_k)Udxdt+\int_Q(u_k-\tilde{u})\{\sum[a_{ij}^{(k,\varepsilon)}-a_{ij}^{(k)}]\varphi_{x_ix_j}\\&\quad+\sum[b_i^{(k,\varepsilon)}-b_i^{(k)}]\varphi_{x_i}+[c^{(k,\varepsilon)}-c^{(k)}]\varphi\}dxdt\\&\quad-\int_\Omega(u_{0k}-u_0)\varphi(x,0)dx\\&\quad+\int_{\partial\Omega\times[0,T]}(\psi_k-\psi)\sum a_{ij}^{(k)}(s,t)\\&\quad\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N}\cos(N,x_i)\cos(N,x_j)dsdt\end{aligned}\tag{8}$$

(8) 式右端诸项,可由下面三个引理来估计.

引理 10 $|\varphi^{(k,\varepsilon)}|\leqslant K=e^{2AT}\sup\limits_{\bar{Q}}|U(x,t)|$.

证 此由极值原理即得. 证毕.

下面用到关于 ν 的比较式子,先来推导一下. 由于

$$1\leqslant\frac{r\nu(r)}{\int_0^r\nu(s)ds}\leqslant m,\quad(0<r<\infty),$$

由此得到

$$\frac{r_2}{r_1}\leqslant\frac{\int_0^{r_2}\nu(s)ds}{\int_0^{r_1}\nu(s)ds}\leqslant\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^m,$$

$$\frac{1}{m}\leqslant\frac{r_2\nu(r_2)}{r_1\nu(r_1)}\frac{\int_0^{r_1}\nu(s)ds}{\int_0^{r_2}\nu(s)ds}\leqslant m,\quad(r_1\leqslant r_2),$$

因而有

$$\frac{1}{m} \leqslant \frac{\nu(r_2)}{\nu(r_1)} \leqslant m\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{m-1}, \quad (r_1 \leqslant r_2).$$

引理 11 设 $\partial\Omega \in C^2$，则 $\left|\frac{\partial\varphi(k,\varepsilon)}{\partial N}\right|\nu\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant K.$

证 令 $\varphi^{(k,\varepsilon)} = e^{-2AT}\tilde{\varphi}$，则 $\tilde{\varphi}$ 满足的方程是

$$\mathscr{L}(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}_t + \sum a_{ij}^{(k,\varepsilon)}\tilde{\varphi}_{x_i x_j} + \sum b_i^{(k,\varepsilon)}\tilde{\varphi}_{x_i} + [c^{(k,\varepsilon)} - 2\Lambda]\tilde{\varphi} = Ue^{2\Lambda t},$$

$\forall(x^0, t^0) \in \partial\Omega \times [0, T]$，由于 $\partial\Omega \in C^2$，我们可取 $\bar{x}^0$ 使 $\{x \mid |x - \bar{x}^0| \leqslant R\} \cap \bar{\Omega} = \{x^0\}$，$R = |x^0 - \bar{x}^0|$。

令

$$\Psi = 1 - \frac{R^q}{[|x - \bar{x}^0|^2 + (t - t^0)^2]^{q/2}}, \quad (\text{常数 } q \text{ 待定}).$$

我们有

$$\mathscr{L}(\Psi) = -q\frac{R^q}{[|x - \bar{x}^0|^2 + (t - t^0)^2]^{q/2+2}} \cdot \left[(q+2)\sum a_{ij}^{(k,\varepsilon)}\frac{(x_i - \bar{x}_i^0)(x_j - \bar{x}_j^0)}{|x - \bar{x}^0|^2 + (t - t^0)^2} - \sum a_{ii}^{(k,\varepsilon)} - (t - t^0) - \sum b_i^{(k,\varepsilon)}(x_i - \bar{x}_i^0)\right] + (c^{(k,\varepsilon)} - 2\Lambda)\Psi,$$

取 $q = \frac{K}{\nu(1/k)}$，则

$$q\sum a_{ij}^{(k,\varepsilon)}\frac{(x_i - \bar{x}_i^0)(x_j - \bar{x}_j^0)}{|x - \bar{x}^0|^2 + (t - t^0)^2} \geqslant \frac{q}{2\Lambda}\int_0^1 \nu_\varepsilon(\theta u_k + (1-\theta)\tilde{u}_\varepsilon)d\theta \cdot \frac{R^2}{(R + \operatorname{diam}\Omega)^2 + T^2} \geqslant CK\int_0^1 \frac{\nu(\theta u_k + (1-\theta)\tilde{u}_\varepsilon)}{\nu(1/k)}d\theta$$

$$\geqslant \frac{CK}{2m}\frac{\nu(e^{-2AT}/(2k))}{\nu(1/k)} \geqslant \frac{CK}{2m^2}\left(\frac{e^{-2AT}}{2}\right)^{m-1}.$$

取 K 很大，可做到

$$-\mathscr{L}(\Psi) \geqslant C_1 q\left[\frac{R^2}{|x-\bar{x}^0|^2+(t-t^0)^2}\right]^{q/2}+\frac{\Lambda}{2}\Psi$$

$$= C_1 q(1-\Psi)+\frac{\Lambda}{2}\Psi \geqslant \min\left(C_1 q, \frac{\Lambda}{2}\right) \geqslant \frac{\Lambda}{2},$$

因此 $\pm\tilde{\varphi}+K_1\Psi\left(K_1=\frac{3}{\Lambda}e^{2\Lambda T}\sup\limits_{Q}|U(x,t)|\right)$ 于 Q 不能取到非正最小. $\pm\tilde{\varphi}+K_1\Psi$ 于 $\bar{Q}$ 的最小仅能于 (x^0, t^0) 取到为零,因此

$$\left[\pm\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial N}+K_1\frac{\partial\Psi}{\partial N}\right]_{(x^0,t^0)} \leqslant 0, \quad (N \text{ 为 } \partial Q \text{ 的外法线}),$$

即

$$\pm e^{2\Lambda t^0}\frac{\partial\varphi(k,\varepsilon)}{\partial N}\bigg|_{(x^0,t^0)} \leqslant -K_1\frac{\partial\Psi}{\partial N}\bigg|_{(x^0,t^0)} \leqslant K_2 q.$$

引理得证.

引理 12 当 $\partial Q\in C^2$ 且 ε 充分小,则有

$$\int_Q\{\sum[\varphi_{x_ix_j}^{(k,\varepsilon)}]^2+\sum[\varphi_{x_i}^{(k,\varepsilon)}]^2\}dx\,dt \leqslant K(k),$$

即积分具有与 ε 无关的界.

证 由 $\varphi=\varphi^{(k,\varepsilon)}$ 所满足的方程得:

$$|\varphi_t+\sum a_{ij}^{(k)}\varphi_{x_ix_j}| \leqslant \omega(\varepsilon)\sum|\varphi_{x_ix_j}|+K(\sum|\varphi_{x_i}|+1),$$

其中 $\omega(\varepsilon)$ 为当 $\varepsilon\to 0$ 时,单调趋于 0 的函数,这由 $\tilde{u}_\varepsilon$, $\tilde{a}_{ij\varepsilon}(x,t,r)\nu_\varepsilon(r)$ 均为 ε 的连续函数而得出.

固定 $(x^0, t^0)\in\bar{Q}$,上式又可化为

$$|\varphi_t+\sum a_{ij}^{(k)}(x^0,t^0)\varphi_{x_ix_j}| \leqslant [\bar{\omega}(|x-x^0|+|t-t^0|)$$
$$+\omega(\varepsilon)]\sum|\varphi_{x_ix_j}|+K(\sum|\varphi_{x_i}|+1), \tag{9}$$

其中 $\bar{\omega}$ 具有与 ω 类似的性质,这由 $a_{ij}\in C(\bar{Q})$, $\tilde{u}\in C(\bar{Q})$ 以及 $u_k\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})$ 对 k 一致而得出.

作转轴变换可得到 $a_{ij}^{(k)}(x^0,t^0)=0$ (当 $i\neq j$).

设 $\zeta(x)$ 与 $\eta(t)$ 为截断函数使

$$\zeta(x)=\begin{cases}1, & |x-x^0|\leqslant\delta/2,\\ 0, & |x-x^0|\geqslant\delta,\end{cases} \quad |\nabla\zeta|\leqslant\frac{2}{\delta};$$

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & |t-t^0|\leqslant\delta/2,\\ 0, & |t-t^0|\geqslant\delta,\end{cases}\qquad |\eta'(t)|\leqslant\frac{2}{\delta}.$$

由 (9) 得到

$$\int_Q\Big[\varphi_t^2+\sum_{i,j}a_{ii}^{(k)}(x^0,t^0)a_{jj}^{(k)}(x^0,t^0)\varphi_{x_ix_j}^2\Big]\zeta^2\eta\,dx\,dt$$
$$-\int_\Omega\sum_i a_{ii}^{(k)}(x^0,t^0)\varphi_{x_i}^2\zeta^2\eta\,\Big|_{t=0}^{T}dx$$
$$+\sum a_{ii}^{(k)}(x^0,t^0)a_{jj}^{(k)}(x^0,t^0)\int_{\partial\Omega\times[0,T]}\varphi_{x_i}[\varphi_{x_ix_j}\cos(N,x_j)$$
$$-\varphi_{x_jx_j}\cos(N,x_i)]\zeta^2\eta\,dS\,dt$$
$$+\int_Q\Big[\sum a_{ii}^{(k)}(x^0,t^0)(-4\varphi_t\varphi_{x_i}\zeta\zeta_{x_i}\eta+\varphi_{x_i}^2\zeta^2\eta')$$
$$+2\sum_{i,j}a_{ii}^{(k)}(x^0,t^0)a_{jj}^{(k)}(x^0,t^0)(\varphi_{x_i}\varphi_{x_jx_j}\zeta\zeta_{x_i}\eta$$
$$-\varphi_{x_i}\varphi_{x_ix_j}\zeta\zeta_{x_j}\eta)\Big]dx\,dt\leqslant 2n^2[\bar\omega(2\delta)+\omega(\varepsilon)]$$
$$\cdot\int_Q\sum\varphi_{x_ix_j}^2\zeta^2\eta\,dx\,dt+K\int_Q\Big(\sum\varphi_{x_i}^2+1\Big)\zeta^2\eta\,dx\,dt$$

由于 $\varphi(x,t)=0$ 导出 $-\int_\Omega\varphi_{x_i}^2\zeta^2\eta\,\Big|_{t=0}^{t=T}dx\geqslant 0$，因此上式右端第二项为非负. 由 $u_k(x^0,t^0)\geqslant\frac{1}{k}e^{-2AT}$，故得:

$$a_{ii}^{(k)}(x^0,t^0)\geqslant\frac{1}{\Lambda}\int_0^1\nu(\theta u_k(x^0,t^0)+(1-\theta)\tilde u(x^0,t^0))d\theta$$
$$\geqslant\frac{1}{2m\Lambda}\nu\left(\frac{e^{-2AT}}{2k}\right).$$

因此结合上面两式得

$$\int_Q\Big(\varphi_t^2+\sum\varphi_{x_ix_j}^2\Big)\zeta^2\eta\,dx\,dt\leqslant K(k)\int_Q\Big[\varphi_t^2+\sum a_{ii}^{(k)}(x^0,t^0)$$
$$\cdot a_{jj}^{(k)}(x^0,t^0)\varphi_{x_ix_j}^2\Big]\zeta^2\eta\,dx\,dt$$
$$\leqslant K(k)[\bar\omega(2\delta)+\omega(\varepsilon)+\varepsilon_1]\int_Q\Big(\varphi_t^2+\sum\varphi_{x_ix_j}^2\Big)\zeta^2\eta\,dx\,dt$$

$$+ K(k, \delta, \varepsilon_1)\int_{Q\cap\{(x,t)||x-x^0|<\delta,|t-t^0|<\delta\}} (\sum\varphi_{x_i}^2 + 1)dx\,dt$$

$$+ K(k)\sum a_{ii}^{(k)}(x^0,t^0)a_{jj}^{(k)}(x^0,t^0)\int_{\partial Q\times[0,T]} \varphi_{x_i}[\varphi_{x_jx_j}\cos(N, x_i)$$

$$- \varphi_{x_ix_j}\cos(N, x_j)]\zeta^2\eta\,ds\,dt \qquad (10)$$

设 ∂Q 的局部坐标为 $(s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})$，并记

$$\sigma_{ijl} = \cos(N, x_i)\cos(N, x_j)[\cos(N, x_i)\cos(s_l, x_j) - \cos(N, x_j)\cos(s_l, x_i)],$$

$$\tau_{ij} = \left[\frac{\partial\cos(N, x_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial\cos(N, x_i)}{\partial x_j}\right]\cos(N, x_i),$$

我们有

$$\int_{\partial Q}\varphi_{x_i}[\varphi_{x_jx_j}\cos(N, x_i) - \varphi_{x_ix_j}\cos(N, x_j)]\zeta^2 dS$$

$$= \int_{\partial Q}\left(\sum_l \varphi_N\varphi_{Ns_l}\sigma_{ijl} + \varphi_N^2\tau_{ij}\right)\zeta^2 dS$$

$$= \int_{\partial Q}\varphi_N^2\left[\left(\tau_{ij} - \frac{1}{2}\sum\frac{\partial\sigma_{ijl}}{\partial s_l}\right)\zeta^2 - \sigma_{ijl}\zeta\zeta_{s_l}\right]dS$$

$$\leqslant \frac{K}{\delta}\int_Q \frac{\partial}{\partial N}(\varphi_N^2\zeta)dx = \frac{K}{\delta}\int_Q(2\varphi_N\varphi_{NN}\zeta + \varphi_N^2\zeta_N)dx$$

$$\leqslant \varepsilon_2\int_Q\sum\varphi_{x_ix_j}^2\zeta^2 dx + K(\varepsilon_2, \delta)\int_{Q\cap\{x||x-x^0|<\delta\}}\sum\varphi_{x_i}^2 dx,$$

将此估计代入 (10) 并取

$$K(k)[\bar{\omega}(2\delta) + \omega(\varepsilon_0) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2] \leqslant \frac{1}{2},$$

则当 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 时有:

$$\int_{Q\cap\{(x,t)||x-x^0|<\delta/2,|t-t^0|<\delta/2\}}(\varphi_t^2 + \sum\varphi_{x_ix_j}^2)dx\,dt$$

$$\leqslant K(k)\int_{Q\cap\{(x,t)||x-x^0|<\delta,|t-t^0|<\delta\}}(\sum\varphi_{x_i}^2 + 1)dx\,dt,$$

取适当的(x^0, t^0)的有限网，使$\bigcup_{(x^0,t^0)}\{(x, t)||x - x^0| < \delta/2, |t - t^0| < \delta/2\}$ 覆盖 Q，由上式得到:

$$\int_Q (\varphi_t^2 + \sum \varphi_{x_ix_j}^2) dx dt \leqslant K(k) \int_Q (\sum \varphi_{x_i}^2 + 1) dx dt \quad (\varepsilon \leqslant \varepsilon_0),$$

又由

$$\int_Q \sum \varphi_{x_i}^2 dx dt = -\int_Q \varphi \Delta \varphi dx dt \leqslant \varepsilon_3 \int_Q \sum \varphi_{x_ix_j}^2 dx dt + K(\varepsilon_3),$$

取 $\varepsilon_3 = \frac{1}{2K(k)}$ 代入上式，上面两式结合就得到了引理的估计．证毕．

定理 13 当 $\partial\Omega \in C^2$，且定理 9 的假设都满足，则蜕化第一边值问题的广义解为唯一．

证 把引理 10、11、12 的估计式代入 (8) 得：

$$\left|\int_Q (u-\tilde{u}) U dx dt\right| \leqslant \sup_Q |U| \int_Q |u - u_k| dx dt + \sup_\Omega |\varphi(x,0)|$$

$$\cdot \int_\Omega |u_{0k} - u_0| dx + K \Big\{ \sup_Q [\sum |a_{ij}^{(k,\varepsilon)} - a_{ij}^{(k)}| + \sum |b_i^{(k,\varepsilon)}$$

$$- b_i^{(k)}| + |c^{(k,\varepsilon)} - c^{(k)}|] \int_Q (\sum \varphi_{x_ix_j}^2 + \sum \varphi_{x_i}^2$$

$$+ \varphi^2) dx dt \Big\}^{1/2} + \int_{\partial\Omega \times [0,T] \cap \{\psi \leqslant 1/k\}} \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\nu\left(\frac{1}{k}\right)\right] A$$

$$\cdot \int_0^1 \nu\left(\frac{\theta}{k} + \psi(1-\theta)\right) d\theta \frac{K}{\nu(1/k)} dS dt$$

$$+ \int_{\partial\Omega \times [0,T] \cap \{\psi > 1/k\}} \frac{1}{k} \nu\left(\frac{1}{k}\right) \frac{K}{\nu(1/k)} dS dt,$$

由于当 $\psi \leqslant 1/k$ 时，$\frac{1}{\nu(1/k)} \int_0^1 \nu\left(\frac{\theta}{k} + \psi(1-\theta)\right) d\theta \leqslant m$，把这一估计代入上式，先令 $\varepsilon \to 0$，再令 $k \to \infty$ 得到：

$$\int (u - \tilde{u}) U dx dt = 0,$$

由 U 的任意性得到 $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$，$\forall (x,t) \in \bar{Q}$．定理得证．

§4 初值问题

考察

$$\begin{cases} u_t = \sum(a_{ij}(x, t, u)u_{x_j})_{x_i} + \sum b_i(x, t, u)u_{x_i} + c(x, t, u)u, \\ \qquad (x, t) \in \boldsymbol{R}^n \times (0, T], \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \boldsymbol{R}^n. \end{cases}$$

对系数的光滑，蜕化等假定与第一边值问题相同．$0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$．要求出这一 Cauchy 问题的非负有界解．

令

$$u_0^k(x) = \begin{cases} u_0(x), & \left(u_0 \geqslant \dfrac{1}{k}\right), \\ \dfrac{1}{k}, & \left(u_0 < \dfrac{1}{k}\right), \end{cases} \quad \forall |x| \leqslant k,$$

$$u|_{\substack{x=\pm k \\ 0\leqslant t\leqslant T}} = \min\left\{u_0^k(\pm k), \frac{1}{k}\right\},$$

作出此第一边值问题的解 $u^k(x)$．由于 $u^k(x)$ 是非蜕化问题的解，因此有：

$$u^k(x) \in C^{2,1}\{\{|x| < k\} \times (0 < t \leqslant T)\} \cap C\{\{|x| \leqslant k\} \times (0 \leqslant t \leqslant T)\},$$

做变换 $u^k = e^{2\Lambda t + \eta(|x|^2+1)^{1/2}}v$，$\eta$ 为正常数，则

$$v_t = \sum(a_{ij}v_{x_j})_{x_i} + \sum\left[b_i + \eta\frac{\sum a_{ij}x_j}{(|x|^2+1)^{1/2}}\right]v_{x_i}$$

$$+ \left\{c - 2\Lambda + \eta\sum\left[\frac{\sum a_{ij}x_j}{(|x|^2+1)^{1/2}}\right]_{x_i} + \eta\frac{\sum b_i x_i}{(|x|^2+1)^{1/2}}\right.$$

$$\left. + \eta^2\frac{\sum a_{ij}x_ix_j}{|x|^2+1}\right\}v,$$

取 η 很小，则由上式得到，v 不在 $\{\{|x| < k\} \times (0 < t \leqslant T)\}$ 中取到正最大，由 $u_0(x) \leqslant M$ 即得 $v \leqslant M$，

$$u^k(x,t) \leqslant M e^{2AT+\eta(k^2+1)^{1/2}}.$$

令 $\eta \to 0$ 得: $u^k \leqslant M e^{2AT}$.

证明了 $u^k(x, t)$ 为一致有界之后，当 $u_0(x) \in C^\beta(-\infty, \infty)$ $(0 < \beta < 1)$ 且具有一致的 Hölder 条件系数时，可选子列逼近而得出 Cauchy 问题解的存在性. 至于非负有界解的唯一性，可仿第一边值问题的做法更简单地得出证明.

存在问题:

1. 蜕化斜微商型的边值问题.

2. 推广本章结果到蜕化的 $u_t = \sum(a_i(x, t, u, u_{x_i}))_{x_i} + b(x, t, u, u_{x_k})$.

3. 推广本章结果到蜕化的 $u_t = a_{ij}(x, t, u, u_{x_k})u_{x_ix_j} + b(x, t, u, u_{x_k})$.

4. 推广到有二个蜕化线方程，例如 $\nu(u) = u^\alpha(1 - u)^\beta$.

5. $\alpha(x, t, u)u_t + \sum(a_{ij}(x, t, u, u_{x_i}))_{x_j} + b(x, t, u, u_{x_k}) = 0$ 方程的定解问题，其中 $\alpha(x, t, 0) = 0$.

6. 拟线性蜕化抛物方程当 $t \to \infty$ 时解的性态.

7. 蜕化椭圆方程的一些类似的定解问题.

8. t 方向蜕化 (即问题 5 中 $\alpha(x, t, 0) = 0$) 时问题是否有 Harnack 不等式成立?

第六章　蜕化拟线性抛物型方程解的传播速度

对前一章讨论的蜕化拟线性抛物型方程的解，再进行下面重要性质的研究，即在系数满足更多一些限制情况下定解区域的研究. 从而证明解的传播速度为有限.这方面的工作见 [29]，[30].

§1　定解区域的估计

设有界区域 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$，$T>0$，$Q=\Omega\times(0,T]$，$Q_0=\boldsymbol{R}^n\times(0,T]$. 方程

$$u_t=\sum(a_{ij}(x,t,u)u_{x_j})_{x_i}+\sum b_i(x,t,u)u_{x_i}+c(x,t,u)u \quad (1)$$

当 $(x,t)\in Q$，$0\leqslant u<\infty$，$\xi\in\boldsymbol{R}^n$ 时满足

$$\frac{1}{\Lambda}\nu(|u|)|\xi|^2\leqslant\sum a_{ij}(x,t,u)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda\nu(|u|)|\xi|^2, \quad (2)$$

其中 Λ 为正常数，$\nu(s)$ 满足

$$\nu(s)\in C[0,\infty);\ \nu(0)=0;\ \nu(s)>0,\ 当\ s>0. \quad (3)$$

又记

$$w=\varphi(u)=\int_0^u\nu(s)ds,\ \ 反函数记为\ u=\Phi(w). \quad (4)$$

设存在 $\delta>0$ 与 $m>1$ 使对任何 w_1, w_2 满足 $0<w_1<w_2<\delta$ 有

$$\frac{1}{m}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1-1/m}\leqslant\frac{\Phi'(w_2)}{\Phi'(w_1)}\leqslant\lambda\left(\frac{w_1}{w_2}\right), \quad (5)$$

其中 $\lambda(\tau)$ 为单调不减且当 $\tau\to0^+$ 时，$\lambda(\tau)\to0$. 再设 $a_{ij}(x,t,u)$，$b_i(x,t,u)$，$b_{ix_j}(x,t,u)$，$c(x,t,u)\in C(\bar{Q}\times[0,\infty))$，$1\leqslant$

$i, j \leqslant n$, 且当 $(x, t) \in \bar{Q}$, $0 < u < \infty$ 时有:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\nu(u)^{1/2}}|b_i(x, t, u) - b_i(x, t, 0)| + \left|\frac{\partial b_i(x, t, u)}{\partial x_i}\right|\right] + |c(x, t, u)| < \eta(u) \tag{6}$$

其中 $\eta(\tau)$ 为单调不减函数.

考察方程 (1) 于 Q_0 中的解时,条件 (2)—(6) 中 Q 改为 Q_0.

定义 1 函数 $u(x, t)$ 定义于 $\bar{Q}$ 或 $\bar{Q}_0$ 称为((1) 的非负)弱解,当存在 (1) 的正有界经典解列 $\{u^k(x, t)\}$ 于 $\bar{Q}$ 或 $\bar{Q}_0$ 一致收敛于 $u(x, t)$.

今设式 (2)—(6) 满足,且

$$0 < u^k(x, t) \leqslant M \quad 于 Q 或 Q_0 \tag{7}$$

在考察经典解应满足某些不等式性质前,先做一些预备性工作.

对 $\lambda(w_1/w_2)$ 与 m 作重新选取可得,$\forall w_1, w_2$ 使 $0 < w_1 < w_2 \leqslant \widetilde{M} = \varphi(Me^{\eta(M)T})$ 时,

$$\frac{1}{m}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1-1/m} \leqslant \frac{\Phi'(w_2)}{\Phi'(w_1)} \leqslant \lambda\left(\frac{w_1}{w_2}\right) \leqslant m \tag{5'}$$

成立. 例如取 $\tilde{\lambda}(\theta) = \max\left\{\lambda(\theta), \max\limits_{\substack{\delta \leqslant w_2 \leqslant \widetilde{M} \\ \theta \leqslant \theta_1 \leqslant 1}} \dfrac{\Phi'(w_2)}{\Phi'(\theta_1 w_2)}\right\}$, 则易证 $\tilde{\lambda}(\theta)$ 为不减,且 $\tilde{\lambda}(\theta) \to 0$ (当 $\theta \to 0^+$ 时);取

$$\widetilde{m} = \max\left\{\tilde{\lambda}(1), \max\{m, 1\} \max_{\delta \leqslant w_1 \leqslant w_2 \leqslant \widetilde{M}} \frac{\Phi'(w_1)w_1^{1-1/m}}{\Phi'(w_2)w_2^{1-1/m}}\right\}.$$

用 $\tilde{\lambda}(\theta)$, $\widetilde{m}$ 代替 $\lambda(\theta)$, m 即可.

由 Cauchy 中值定理得到,当 $0 < w_1 < w_2 \leqslant \widetilde{M}$ 时,

$$\frac{\Phi(w_2)}{\Phi(w_1)} = \frac{w_2}{w_1}\frac{\Phi'(\theta w_2)}{\Phi'(\theta w_1)}, \quad (特定的 \theta 满足 0 < \theta < 1),$$

结合 (5') 得

$$\frac{1}{m}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/m} \leqslant \frac{\Phi(w_2)}{\Phi(w_1)} \leqslant m\frac{w_2}{w_1}, \tag{8}$$

故对 $0 < u_1 < u_2 \leqslant M$ 有:

$$\frac{1}{m}\frac{u_2}{u_1} \leqslant \frac{\varphi(u_2)}{\varphi(u_1)} \leqslant m^m\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^m, \tag{9}$$

$$\frac{1}{m} \leqslant \frac{\nu(u_2)}{\nu(u_1)} \leqslant m^m\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{m-1}. \tag{10}$$

我们定义上 $\mathscr{B}_2$ 类函数如下: $\forall x^0 \in \Omega$, 当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时, 记

$$A_{k,\rho}(t, w) \equiv A_{k,\rho}(t) = \{x \in K(\rho) \cap \Omega \,|\, w(x, t) > k\},$$

其中 $K(\rho) = K(x^0, \rho) = \{x \,|\, |x - x^0| < \rho\}$. 记

$$\zeta(x) = \zeta(x, \rho_1, \rho_2) = \begin{cases} 1, & |x - x^0| \leqslant \rho_2, \\ \dfrac{\rho_1 - |x - x^0|}{\rho_1 - \rho_2}, & \rho_2 < |x - x^0| < \rho_1, \\ 0, & |x - x^0| \geqslant \rho_1, \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\rho_1 > \rho_2 > 0$.

定义 2 函数 $w(x, t)$ 定义于 $\bar{Q}$ 称为属于上 $\mathscr{B}_2(Q, \sigma, \gamma, M, \Phi)$ 类, 当它满足

(i) $w(x, t) \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$, 且 $0 < w(x, t) \leqslant M$ 于 $\bar{Q}$.

(ii) $\forall \rho \in (0, 1)$, $x^0 \in \Omega$ 与 $t \in [0, T]$, 当 $k \geqslant \max\limits_{x \in K(\rho) \cap \partial\Omega} w(x, t)$ 时有:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\gamma t}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2(x) \chi_k(w - k)\,dx\right. + \sigma e^{-\gamma t}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2(x) |\nabla w|^2 dx \leqslant \gamma e^{-\gamma t}\int_{A_{k,\rho}(t)} |\nabla \zeta|^2 (w - k)^2 dx \tag{12}$$

其中 $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$,

$$\chi_k(s) = \int_0^s \Phi'(k + \tau)\tau\,d\tau, \tag{13}$$

其中 $\Phi(s)$ 具下列性质

(i) $\Phi(s) \in C'[0, M]$, $\Phi(0) = 0$, 且当 $s > 0$ 时 $\Phi(s) > 0$.

(ii) 当 $0 < w_1 < w_2 \leqslant M$ 时，(5') 成立。

引理 1 设 $u(x,t)$ 为方程 (1) 于 Q 的正经典解且 $0 < u(x,t) \leqslant M$ 于 $\bar{Q}$. 设 (2)—(6) 与 (5') 满足，再添加条件

$$b_i(x,t,0) = 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{14}$$

则 $w(x,t) = \varphi(e^{-\eta(M)t}u(x,t))$ 属于上 $\mathscr{B}_2\left(Q, \frac{1}{2m\Lambda}, \gamma, \widetilde{M}, \Phi\right)$ 类，其中 $\widetilde{M} = \varphi(M)$，$\gamma$ 为适当的正常数，又 Φ 为 φ 的反函数。

证 令 $u = e^{\eta(M)t}v$ 代入 (1)，再乘 $\zeta^2(x)(w-k)^+$ 于 Q 积分得：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2\chi_k(w-k)dx + \int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2\sum a_{ij}w_{x_i}v_{x_j}dx$$

$$= \int_{A_{k,\rho}(t)} -2\zeta(w-k)\sum a_{ij}\zeta_{x_i}v_{x_j}dx$$

$$+ \int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2(w-k)[\sum b_i v_{x_i} + (c-\eta(M))v]dx,$$

记

$$h_i(x,t,r) = \int_0^r b_i(x,t,e^{\eta(M)t}\Phi(k+\tau))\Phi'(k+\tau)\tau d\tau,$$

应用 (6)、(10) 与 (14) 得：

$$h_i^2 \leqslant \int_0^r b_i^2\Phi'(k+\tau)\tau d\tau \int_0^r \Phi'(k+\tau)\tau d\tau$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\eta^2(M)m^m e^{(m-1)\eta(M)}r^2\chi_k(r),$$

$$\left|\frac{\partial h_i}{\partial x_i}\right| \leqslant \eta(M)\chi_k(r), \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

因此

$$\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2(w-k)b_i u_{x_i}dx = \int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2\frac{dh_i(x,t,w-k)}{dx_i}dx$$

$$-\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2\left[\int_0^{w-k}\frac{\partial b_i(x,t,e^{\eta(M)t}\Phi(k+\tau))}{\partial x_i}\right.$$

$$\cdot\, \Phi'(k+\tau)\tau d\tau \Big] dx,$$

上式右端第一项用分部积分估计，由此得到：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2\chi_k(w-k)dx + \frac{1}{m\Lambda}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2|\nabla w|^2 dx$$

$$\leqslant \gamma_1\Big[\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta|\nabla\zeta|\,|\nabla w](w-k)dx$$

$$+\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta|\nabla\zeta|\chi_k^{1/2}(w-k)(w-k)dx$$

$$+\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2\chi_k(w-k)dx\Big],$$

应用 Schwarz 不等式，由上式得：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2\chi_k(w-k)dx + \frac{1}{2m\Lambda}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2|\Delta w|^2 dx$$

$$\leqslant \gamma\Big[\int_{A_{k,\rho}(t)} |\Delta\zeta|^2(w-k)^2 dx$$

$$+\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2\chi_k(w-k)dx\Big]$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\gamma t}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2\chi_k(w-k)dx\right] + \frac{1}{2m\Lambda}e^{-\gamma t}$$

$$\cdot\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2|\nabla w|^2 dx \leqslant \gamma e^{-\gamma t}\int_{A_{k,\rho}(t)} |\nabla\zeta|^2(w-k)^2 dx,$$

即 $w(x,t)$ 属于上 $\mathscr{B}_2\left(Q, \frac{1}{2m\Lambda}, \gamma, \widetilde{M}, \Phi\right)$ 类. 引理证毕.

引理 2 设 $w(x,t)$ 属于上 $\mathscr{B}_2$ 类，则 $\forall\beta\in(0,1)$，存在 $a>0$，a 仅依赖于 β 及 $\mathscr{B}_2$ 的诸参数，使得当 μ, k 满足

$$\mu \geqslant \max_{\substack{x\in K(\rho)\cap Q\\ 0<t\leqslant t^0}} w(x,t), \quad t^0 \leqslant a\Phi'(\mu)\rho^2, \tag{15}$$

$$k \geqslant \max\{\beta\mu,\ \max_{x\in K(\rho)\cap\Omega} w(x,0),\ \max_{\substack{x\in K(\rho)\cap\partial\Omega \\ 0\leqslant t\leqslant t^0}} w(x,t)\}, \tag{16}$$

$$H \equiv \mu - k > 0$$

则有

$$\text{mes}\, A_{\mu-(1-\beta)^2 H,\rho/4}(t) = 0, \quad 当\ t\in[0,t^0].$$

证 (12) 由 0 到 t 积分，取 $\zeta(x) = \zeta(x,\rho,\rho/2)$，并注意到由 (16) 导出的 mes $A_{k,\rho}(0) = 0$，我们得到：

$$e^{-\gamma t}\int_{A_{k,\rho}(t)} \zeta^2\chi_k(w-k)dx \leqslant \frac{4\gamma H^2 t^0}{\rho^2}\kappa_n\rho^n \quad (当\ t\leqslant t^0),$$

κ_n 为单位球体积. 当 $t\in[0,t^0]$ 时，由上式及 (15) 得：

$$\chi_k(\beta H)\ \text{mes}\, A_{k+\beta H,\rho/2}(t) \leqslant 4a\gamma e^{\gamma T}H^2\Phi'(\mu)\kappa_n\rho^n \tag{17}$$

应用 (5′) 得：

$$\frac{\chi_k(\beta H)}{\Phi'(\mu)} = \int_0^{\beta H}\frac{\Phi'(k+\tau)}{\Phi'(\mu)}\tau d\tau \geqslant \frac{1}{2m}(\beta H)^2, \tag{18}$$

结合 (17) 得：

$$\text{mes}\, A_{k+\beta H,\rho/2}(t) \leqslant \frac{aC_1}{\beta^2}\rho^n, \quad \forall t\in[0,t^0], \tag{19}$$

这里 C_1 及以后的 $C_2, C_3, \cdots$ 表示仅依赖于 $\mathscr{B}_2$ 诸参数的正常数. 令

$$k_h = k + \beta(2-\beta)H - \frac{\beta(1-\beta)H}{2^h},$$

$$\rho_h = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2^{h+2}}\right)\rho,$$

$$\mu_h = \max_{0\leqslant t\leqslant t^0} \text{mes}\, A_{k_h,\rho_h}(t), \quad \zeta_h(x) = \zeta(x,\rho_h,\rho_{h+1}),$$

$$I_h(t) = e^{-\gamma t}\int_{A_{k_h,\rho_h}(t)} \zeta_h^2(x)\chi_{k_h}(w-k_h)dx.$$

则由 (19) 得：

$$\mu_0 \leqslant \frac{aC_1}{\beta^2}\rho^n. \tag{20}$$

我们要证明当 a 充分小时可导出

$$\lim_{h\to\infty} \mu_h = 0.$$

这就是引理所需要的结论．当 $w \geqslant k_h$ 时，$k_h \geqslant k + \beta H \geqslant \beta\mu$，应用 (5′) 与 (13) 得:

$$\frac{\chi_{k_h}(w-k_h)}{\Phi'(\mu)} \leqslant \int_0^{w-k_h} \frac{\Phi'(k_h+\tau)}{\Phi'(\mu)} \tau d\tau$$

$$\leqslant m\int_0^{w-k_h}\left(\frac{\mu}{k_h+\tau}\right)^{1-1/m} \tau d\tau \leqslant \frac{m}{2\beta^{1-1/m}}(w-k_h)^2,$$

由此得到

$$I_h(t) \leqslant \frac{m}{2\beta^{1-1/m}}\Phi'(\mu)\int_{A_{k_h,\rho_h}(t)} \zeta_h^2(w-k_h)^2 dx \qquad (21)$$

$\forall \mu\in \mathring{W}_2^1(\Omega)$，由 Соболев 嵌入定理得:

$$\int_{\Omega\cap\{u>0\}} u^2 dx \leqslant C(n)\,(\operatorname{mes}\Omega\cap\{u>0\})^{2/n}\int_{\Omega\cap\{u>0\}} |\nabla u|^2 dx,$$

把这一关系式代入 (21) 的右端得到:

$$I_h(t) \leqslant C_2\frac{1}{\beta^{1-1/m}}\Phi'(\mu)\mu_h^{2/n}\left[\int_{A_{k_h,\rho_h}(t)} \zeta_h^2|\nabla w|^2 dx + \frac{H^2}{(\rho_h-\rho_{h+1})^2}\mu_h\right]. \qquad (22)$$

另一方面，由不等式 (12) 得:

$$I_h'(t) + \sigma e^{-\gamma t}\int_{A_{k_h,\rho_h}(t)} \zeta_h^2|\nabla w|^2 dx \leqslant \frac{\gamma H^2}{(\rho_h-\rho_{h+1})^2}\mu_h. \qquad (23)$$

由

$$\sup\{s\in[0,t]\,|\,I'(s)\geqslant 0\} = \tau$$

定出 τ． 由于 $I_h(0)=0$ 且 $I_h'(0)\geqslant 0$，故 τ 为存在． 显然有 $I_h'(\tau)\geqslant 0$ 且 $I_h(t)\leqslant I_h(\tau)$．因此结合 (22)，(23) 得到:

$$I_h(t) \leqslant I_h(\tau) \leqslant \frac{C_2}{\beta^{1-1/m}}\Phi'(\mu)\left(\frac{\gamma}{\delta}e^{\gamma T}+1\right)\frac{H^2\mu_h^{1+2/n}}{(\rho_h-\rho_{h+1})^2}. \qquad (24)$$

应用 (18) 得

$$I_h(t) \geqslant e^{-\gamma T}\chi_{k_h}(k_{h+1}-k_h) \text{ mes } A_{k_{h+1},\rho_{h+1}}(t)$$
$$\geqslant \frac{1}{2m} e^{-\gamma T}\Phi'(\mu)(k_{h+1}-k_h)^2 \text{ mes } A_{k_{h+1},\rho_{h+1}}(t),$$

结合 (24) 得到:

$$(k_{h+1}-k_h)^2\mu_{h+1} \leqslant \frac{2mC_2e^{\gamma T}}{\beta^{1-1/m}}\left(\frac{\gamma}{\delta}e^{\gamma T}+1\right)\frac{H^2\mu_h^{1+2/n}}{(\rho_h-\rho_{h+1})^2},$$

因此

$$\mu_{h+1} \leqslant \frac{C_3}{\beta^{3-1/m}}\frac{2^{4h}\mu_h^{1+2/n}}{\rho^2}.$$

记 $y_h=\frac{\mu_h}{\rho^n}$, 上式化为

$$y_{h+1} \leqslant \frac{C_3}{\beta^{3-1/m}}2^{4h}y_h^{1+2/n}.$$

由 (20) 得:

$$y_0 \leqslant \frac{aC_1}{\beta^2}.$$

仿前一章的讨论知,只要取

$$a \leqslant \frac{\beta^2}{C_1}\left(\frac{\beta^{3-1/m}}{C_3 2^{2n}}\right)^{n/2}, \tag{25}$$

就能导出

$$y_h \leqslant \frac{aC_1}{\beta^2}2^{-2nh} \quad (h=0, 1, 2, \cdots),$$

令 $h\to\infty$ 得到 $\lim\limits_{h\to\infty} y_h=0$, $\lim\limits_{h\to\infty}\mu_h=0$. 引理得证.

由 $\lambda(\tau)\to 0$ $(\tau\to 0^+)$, 可取定 $q_0\in(0, 1)$ 使

$$\lambda(q_0) \leqslant \frac{1}{16}. \tag{26}$$

记

$$\beta = 1-(1-q_0)^{1/3}. \tag{27}$$

引理 3 设 $w(x, t)$ 属于上 $\mathscr{B}_2$ 类, 则存在常数 b, 仅依赖于 $\mathscr{B}_2$ 的参数,使得 $\forall(x^0, t^0)\in Q$ 有:

$$w(x^0, t^0) \leqslant \frac{1}{\beta} \max \{ \max_{K(x^0, b(t^0)^{1/2}) \cap \Omega} w(x, 0),$$

$$\max_{\substack{x \in K(x^0, b(t^0)^{1/2}) \cap \partial\Omega \\ 0 \leqslant t \leqslant t^0}} w(x, t) \}. \tag{28}$$

证 记

$$\mu_0 = M, \ \mu_l = q_0 \mu_{l-1}, \ k_l = \beta \mu_l, \ \rho_0 = \left[\frac{t^0}{a\Phi'(M)} \right]^{1/2},$$

$$\rho_l = \frac{\rho_{l-1}}{4}, \ Q_l = \{(x, t) \in Q \,|\, |x - x^0| < \rho_l, \ 0 < t \leqslant t^0\}$$

$$(l = 1, 2, \cdots),$$

$$M_0 = \max \{ \max_{K(\rho_0) \cap \Omega} w(x, 0), \max_{\substack{x \in K(\rho_0) \cap \partial\Omega \\ 0 \leqslant t \leqslant t^0}} w(x, t) \},$$

$$l^* = \sup \{ l \,|\, k_l > M_0 \}, \tag{29}$$

其中 a, q_0, β 分别由 (25), (26), (27) 定出.

用归纳法证明,当 $l \leqslant l^* + 1$ 时有:

$$\max_{Q_l} w(x, t) \leqslant \mu_l, \quad t^0 \leqslant a\Phi'(\mu_l)\rho_l^2. \tag{30}$$

由记号 μ_0, ρ_0 的取法知 (30) 当 $l = 0$ 时成立. 设它当 $l \leqslant l^*$ 时成立,要推到 $l + 1$ 时也成立.

由 $l \leqslant l^*$ 得到 $k_l > M_0$, 因此

$$k_l \geqslant \max \{\beta\mu_l, M_0\}.$$

因而可应用引理 2 于区域 Q_l 得到,当 $0 \leqslant t \leqslant t^0$ 时

$$\text{mes } A_{\mu_l - (1-\beta)^2 H_l, \rho_l/4}(t) = 0$$

成立,其中 $H_l = \mu_l - k_l = (1 - \beta)\mu_l$, 这导出

$$\max_{Q_{l+1}} w(x, t) \leqslant \mu_l - (1 - \beta)^2 H_l = \mu_l - (1 - \beta)^3 \mu_l$$

$$= q_0 \mu_l = \mu_{l+1}.$$

再应用 (5′), (25), (30) 得:

$$a\Phi'(\mu_{l+1})\rho_{l+1}^2 = \frac{\Phi'(\mu_{l+1})}{\Phi'(\mu_l)} \cdot \frac{a}{16} \Phi'(\mu_l)\rho_l^2 \geqslant \frac{1}{\lambda(\mu_{l+1}/\mu_l)} \frac{t^0}{16}$$

$$= \frac{1}{\lambda(q_0)} \frac{t^0}{16} \geqslant t^0.$$

因此由归纳法得出，(30) 当 $l \leqslant l^* + 1$ 时成立. 特别有

$$\max_{Q_{l^*+1}} w(x, t) \leqslant \mu_{l^*+1}.$$

由 l^* 的定义式子 (29) 得 $k_{l^*+1} \leqslant M_0$，因此有：

$$w(x^0, t^0) \leqslant \max_{Q_{l^*+1}} w(x,t) \leqslant \mu_{l^*+1} - \frac{1}{\beta} k_{l^*+1} \leqslant \frac{M_0}{\beta}.$$

当取定 $b = [a\Phi'(M)]^{-1/2}$ 时，上式就是 (28). 引理得证.

定理 4 设 $u(x, t)$ 为方程 (1) 于 Q 的 (非负) 弱解且 (2)—(6) 与 (5′) 满足，则 $\forall (x^0, t^0) \in Q$，存在常数 K，b 仅依赖于 n，m，δ，T，M，Λ，$\eta(s)$，$\lambda(s)$ 及函数 $b_1(x, t), \cdots, b_n(x, t)$，使

$$u(x^0, t^0) \leqslant K \max\{\sup_{K(x^0, b(t^0)^{1/2}) \cap Q} u(x, 0),$$

$$\sup_{\substack{K(x^0, b(t^0)^{1/2}) \cap \partial Q \\ 0 \leqslant t \leqslant t^0}} u(x, t)\}, \tag{31}$$

其中 $K(x^0, \rho)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中 x^0 为中心，ρ 为半径的球.

如果 $u(x, t)$ 为 (1) 于 Q_0 中的非负弱解，则上式化简为

$$u(x^0, t^0) \leqslant K \sup_{K(x^0, b(t^0)^{1/2})} u(x, 0). \tag{31′}$$

证 先看 (14) 成立的特殊情况，由定义 1，有 (1) 的正经典解 $u^l(x, t)$ 满足 (7) 使 $u^l(x, t)$ 一致收敛于 $u(x, t)$. 令 $W^l(x, t) = \varphi(u^l(x, t)e^{-\eta(M)t})$，由引理 1，$W^l(x, t)$ 属于上 $\mathscr{B}_2$ 类，其参数与 l 无关. 因此应用引理 3 得，存在与 l 无关的常数 b 使 $\forall (x^0, t^0) \in Q$ 有：

$$W^l(x^0, t^0) \leqslant \frac{1}{\beta} \max\{\max_{K(x^0, b(t^0)^{1/2}) \cap Q} w^l(x, 0),$$

$$\max_{\substack{K(x^0, b(t^0)^{1/2}) \cap \partial Q \\ 0 \leqslant t \leqslant t^0}} W^l(x, t)\},$$

结合 (9) 得

$$u^l(x^0, t^0) \leqslant \frac{m e^{\eta(M)T}}{\beta^{1/m}} \max\{\max_{K(x^0, b(t^0)^{1/2}) \cap Q} u^l(x^0, 0),$$

$$\max_{\substack{K(x^0, b(t^0)^{1/2})\cap\partial U \\ 0\leqslant t\leqslant t^0}} u^l(x, t)\},$$

$l\to\infty$ 得到，当 (14) 成立时定理为真.

一般情况可化为 (14) 成立的情况如下.

做非奇异变换

$$\begin{cases} x_i = x_i(y, \tau), & 1\leqslant i\leqslant n, \\ t = \tau, \end{cases}$$

则 (1) 化为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum \frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_l}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right) + \left[\sum b_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} - \frac{\partial y_k}{\partial t}\right.$$

$$\left. - \sum a_{ij}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial y_k} + cu, \tag{32}$$

选取 $y_k(x_1, \cdots, x_n, t)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，使它是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum b_i(x, t, 0)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \tag{33}$$

的 n 个独立的初积分. 因此可取定 y_k 为由

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -b_i(x, t, 0) \quad (1\leqslant i\leqslant n), \\ x_i|_{t=0} = y_i \end{cases}$$

解出 $x_i = x_i(y_1, \cdots, y_n, t)$ 反解 $y_1, \cdots, y_n$ 而得. 因而 $\partial x_i/\partial y^j$ $(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 有界. 由

$$\frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)} = \exp\left(-\int_0^t \sum \frac{\partial b_i}{\partial x_i}dt\right)$$

知当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，它为下方有正界，因而 $\partial y_j/\partial x_i$ $(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 有界. 矩阵 $\left\{\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)^*\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)\right\}$ 的特征值上下方有正界 Σ, σ. 故有

$$\frac{\sigma}{\Lambda}\nu(\mu)|\xi|^2 \leqslant \sum a_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\xi_k\xi_l \leqslant \Lambda\Sigma\nu(u)|\xi|^2, \ \forall \xi\in \boldsymbol{R}^n.$$

由常微分方程解对初值的连续依赖性知 $\sum \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)$ 为有界.

因而方程 (32) 是 (14) 成立的情况. 由

$$u(y^0, \tau^0) \leqslant K \max \{ \sup_{K(y^0, b(\tau^0)^{1/2}) \cap \Omega} u(y, 0),$$

$$\sup_{K(y^0, b(\tau^0)^{1/2}) \cap \partial\Omega} u(y, \tau)\},$$

代回到变量 (x, t), 适当地增大常数 b (仅与 x, y 间的变换有关, 而对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 为一致)得到定理的结论. 证毕.

推论 5 设 $u(x, t)$ 为 (1) 于 $\bar{Q}$ 的弱解, 且(2)—(6)满足. 又设 $u(x, 0)$ 具有紧支集, 则 $\forall t (0 \leqslant t \leqslant T)$, 存在常数 R_t 使

$$u(x, t) = 0, \quad 当 |x| \geqslant R_t.$$

注 这一推论就是解的传播速度为有限的性质.

证 设 $u(x, 0)$ 的支集在球 $K(0, R_0)$ 内, 则可取 $R_t = R_0 + bt^{1/2}$, b 由定理 4 定出. 证毕.

§2 解的下限估计

我们可仿上 $\mathscr{B}_2$ 函数类的定义作出下 $\mathscr{B}_2$ 函数类, 由此可得到解的又一些性质. 设 $x^0 \in \Omega$, $\rho > 0$, 当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时记

$$B_{k,\rho}(t, w) \equiv B_{k,\rho}(t) = \{x \in K(\rho) \cap \Omega \mid w(x, t) < k\}.$$

定义 3 $w(x, t)$ 定义于 $\bar{Q}$ 称为属于下 $\mathscr{B}_2$ 函数类 $\mathscr{B}_2(Q, \sigma, \gamma, M, \Phi)$, 当它满足

(i) $w(x, t) \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ 且 $0 < w(x, t) \leqslant M$ 于 $\bar{Q}$.

(ii) $\forall \rho \in (0, 1)$, $x^0 \in \Omega$ 与 $t \in [0, T]$, 当

$$0 < k \leqslant \min_{x \in K(\rho) \cap \partial\Omega} w(x, t)$$

时有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-\gamma t} \int_{B_{k,\rho}(t)} \zeta^2(x) \tilde{\chi}_k(k - w) dx\right]$$

$$+ \sigma e^{-\gamma t} \int_{B_{k,\rho}(t)} \zeta^2 |\nabla w|^2 dx$$

$$\leqslant \gamma e^{-\gamma t} \int_{B_{k,\rho}(t)} |\nabla \zeta|^2 (k - w)^2 dx$$

其中 $\zeta(x)=\zeta(x,\rho,(1-\sigma)\rho)$, $\forall\sigma\in(0,1)$; 又 $\zeta(x,\rho_1,\rho_2)$ 的定义见 (11).

$$\tilde{\chi}_k(s)=\int_0^s\Phi'(k-\tau)\tau d\tau;$$

对 Φ 的假设与定义 2 相同.

引理 6 设 $w(x,t)$ 属于下 $\mathscr{B}_2(Q,\sigma,\gamma,M,\Phi)$ 类,当

$$\inf_{x\in K(x^0,\rho)}w(x,0)\geqslant k>0,$$

则存在仅依赖于 $\mathscr{B}_2$ 诸参数的常数 a 使

$$\inf_{x\in K(x^0,\rho/4)}w(x,t)\geqslant k/4,\ \text{当}\ 0\leqslant t\leqslant t^0=\min\{a\Phi'(k)\rho^2,T\}.$$

证 由前一章知有

$$\frac{1}{2m}s^2\leqslant\frac{\tilde{\chi}_k(s)}{\Phi'(k)}\leqslant m^2s^2,\quad \text{当}\ k\geqslant s>0.$$

由此，引理 6 的证明类似于引理 2， 仅作以下代换即可： β 换为 $1/2$, H 换为 $-k/2$, $\chi_k(s)$ 换为 $\tilde{\chi}_k(s)$. 引理得证.

引理 7 设 $u(x,t)$ 为方程 (1) 于 Q 的 (非负) 弱解且 (2)—(6), (5′) 与 (14) 满足. $\forall(x^0,t^0)\in Q$, 定出

$$\tilde{\mu}_\rho=\inf_{K(x^0,\rho)}u(x,0),$$

则存在常数 b, 仅依赖于 $\mathscr{B}_2$ 的参数,使

$$u(x^0,t^0)\geqslant\frac{e^{-\eta(M)t^0}}{4m}\min\left\{\tilde{\mu}_\rho,\Phi\left(\widetilde{M}\lambda^{-1}\left(\frac{\rho^2}{b^2t^0}\right)\right)\right\},$$

其中 $\widetilde{M}=\varphi(M)$, 又 $\lambda^{-1}(s)$ 是由 (5′) 定出的 $\lambda(s)$ 的反函数.

证 $\tilde{\mu}_\rho=0$ 时,定理显然为真. 当 $\tilde{\mu}_\rho>0$ 时,仿引理 1 得到, 对 (1) 的正经典解 $u^l(x,t)$ 有 $W^l(x,t)=\varphi(e^{\eta(M)t}u^l(x,t))$ 属于下 $\mathscr{B}_2\left(Q,\frac{1}{2m\Lambda},\gamma,\widetilde{M},\Phi\right)$ 类. 为了简单,略去肩标 l. 取 k 使

$$a\Phi'(k)\rho^2\geqslant t^0,$$

由 (5′) 知，要使上式满足仅需选取

$$\lambda\left(\frac{k}{\widetilde{M}}\right) \leqslant \frac{a\rho^2\Phi'(\widetilde{M})}{t^0}, \quad \text{即 } k \leqslant \widetilde{M}\lambda^{-1}\left(\frac{\rho^2}{b^2t^0}\right),$$

其中 $b = [a\Phi'(\widetilde{M})]^{1/2}$. 由引理 6 知，当我们取

$$k = \min\left\{\varphi(\tilde{\mu}_\rho), \widetilde{M}\lambda^{-1}\left(\frac{\rho^2}{b^2t^0}\right)\right\}$$

时有：

$$w(x^0, t^0) \geqslant \frac{1}{4}\min\left\{\varphi(\tilde{\mu}_\rho), \widetilde{M}\lambda^{-1}\left(\frac{\rho^2}{b^2t^0}\right)\right\},$$

由上式，并应用 (9) 得：

$$u(x^0, t^0) \geqslant \frac{e^{-\eta(M)t^0}}{4m}\min\left\{\tilde{\mu}_\rho, \Phi\left(\widetilde{M}\lambda^{-1}\left(\frac{\rho^2}{b^2t^0}\right)\right)\right\}.$$

当 $u(x, t)$ 不是正经典解而仅是 (非负) 弱解时，再令 $l \to \infty$ 即可．证毕。

定理 8 设 $u(x, t)$ 为方程 (1) 于 Q 的(非负)弱解，且 (2)—(6) 与 (5′) 满足，则 $\forall(x^0, t^0) \in Q$ 有：

$$u(x^0, t^0) \geqslant K^* \inf_{K(x^0, b(t^0)^{1/2})} u(x, 0), \tag{34}$$

K^*, b 仅依赖于 n, m, δ, T, M, Λ, $\eta(s)$ 与 $\lambda(s)$ 及函数 $b_1(x, t), \cdots, b_n(x, t)$.

证 当 (14) 满足时，应用引理 7，取 $\rho = b(t^0)^{1/2}$ 得：

$$u(x^0, t^0) \geqslant K_1 \min\{\inf_{K(x^0, b(t^0)^{1/2})} u(x, 0), K_2\}$$

$$\geqslant K_1 \min\left(1, \frac{K_2}{M}\right) \inf_{K(x^0, b(t^0)^{1/2})} u(x, 0)$$

其中 $K_2 = \Phi(\widetilde{M}\lambda^{-1}(1))$. 即 (34) 已成立.

当 (14) 不满足时，应用定理 4 中所用的变换，得证本定理成立。

注 定理8仅是定理4的一个适当的补充，总之，拟线性蜕化抛物型方程的定解区域已明确，但影响区域尚不明确. 由引理6定出的影响区域过分狭小，不见得是真正的影响区域. 如何定出影响区域，还是一个未解决的问题.

第七章　抛物型方程的 Александров 型极值原理与 Bony 型极值原理

研究拟线性与完全非线性椭圆、抛物型方程的定解问题，基础是 Александров 型极值原理及密度定理．有关密度定理俟下一章介绍，本章介绍前者．

§1　引　　言

对线性方程来说，Александров 型极值原理是古典极值原理的推广，方程系数仅设为可测即可．

设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界区域，对线性椭圆方程

$$\begin{cases}\sum a_{ij}(x)u_{x_ix_j}=f(x), & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}\geqslant 0\end{cases}\tag{1}$$

的解 $u(x)$，设 $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2(\lambda>0)$，$f>0$．与 Monge-Ampere 方程

$$\begin{cases}\det(z_{x_ix_j})=\dfrac{1}{\det(a_{ij})}\left(\dfrac{f}{n}\right)^n,\\ z|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{2}$$

的凹函数解 $z(x)$ 相比较，应用算术平均值大于或等于几何平均值的不等式得：

$$\sum a_{ij}z_{x_ix_j}=\mathrm{tr}\left(\sum_j a_{ij}z_{x_jx_k}\right)\geqslant n\det{}^{1/n}\left(\sum_j a_{ij}z_{x_jx_k}\right)$$

$$=n[\det(a_{ij})\det(z_{x_jx_k})]^{1/n}=f,$$

因而

$$\sum a_{ij}(u-z)_{x_ix_j}\leqslant 0,\quad x\in\Omega,$$

$$[u - z]_{\partial\Omega} \geqslant 0,$$

由于 $u-z$ 不在 $\bar{\Omega}$ 中取到负最小，故得

$$\min_{\Omega} u \geqslant \min_{\bar{\Omega}} z.$$

对凹函数 $z(x)$ 于 $\bar{\Omega}$ 中的 min 有显式估计，由此得出 $\min\limits_{\Omega} u$ 的显式估计.

上述极值原理的估计由 Александров 给出[31]，但证明牵涉到 Monge-Ampere 方程广义解存在性的证明，因而显得证明不那么直接.

能否避开证明 (2) 的解为存在，而直接得出椭圆方程 Александров 极值原理的估计呢？ Pucci[32] 首先做到了这一点. 即由 (1) 的解为存在（当系数光滑程度较好时这是早已证明了的事），作出 $u(x)$ 的负凹包函数

$$\check{u}(x) = \inf\ \min\{0,\ \sum\alpha_i u(x^i)\},\ \ \forall \sum\alpha_i x^i = x,\ \ x^i \in \Omega,$$
$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1,\ \ \sum\alpha_i = 1.$$

对凹函数 $\check{u}(x)$ 于凸区域 Ω 有显式估计，由此得到 $u(x)$ 的 Александров 估计，参见 [5].

抛物型方程情况与椭圆型方程情况基本类似. 设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中有界凸区域，

$$\begin{cases}\sum a_{ij}(x,\ t)u_{x_ix_j} - u_t = f(x,\ t), & (x,\ t) \in Q = \Omega \times (0,\ T],\\ u|_{\partial^* Q} \geqslant 0, & \partial^* Q = \Omega \times \{t=0\} \cup \partial\Omega \times [0,\ T].\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\partial^* Q$ 表示 Q 的抛物边界. 设 $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 (\lambda > 0)$, $f > 0$. $u(x,\ t)$ 与抛物 Monge-Ampere 型方程的定解问题

$$\begin{cases}-z_t \det(z_{x_ix_j}) = \dfrac{1}{\det(a_{ij})}\left(\dfrac{f}{n+1}\right)^{n+1},\\ z|_{\partial^* Q} = 0\end{cases} \tag{4}$$

的对 x 为凹，对 t 为单调减少的解 $z(x,t) \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ 相比较，

$$\sum a_{ij}z_{x_ix_j} - z_t = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} -z_t & 0 \\ 0 & \sum_i a_{ij}z_{x_jx_k} \end{pmatrix}$$

$$\geqslant (n+1)\det^{\frac{1}{n+1}}\begin{pmatrix} -z_t & 0 \\ 0 & \sum_i a_{ij}z_{x_j}z_{x_k} \end{pmatrix}$$

$$= (n+1)[(-z_t)\det(a_{ij})\det(z_{x_jx_k})]^{\frac{1}{n+1}} = f$$

因而

$$\begin{cases} \sum a_{ij}(u-z)_{x_ix_j} - (u-z)_t \leqslant 0, & (x,t) = Q, \\ [u-z]_{\partial^* Q} \geqslant 0, \end{cases}$$

$u-z$ 不在 $\bar{Q}$ 中取到负最小，故得 $\min\limits_{\bar{Q}} u \geqslant \min\limits_{\partial^* Q} z$. $z(x,t)$ 于 $\bar{Q}$ 中的 min 有显式估计，由此得到 $\min\limits_{\bar{Q}} u(x,t)$ 的显式估计. 这是 Клыров[33] 关于 Александров 型极值原理的工作. 但首先要证明 (4) 的广义解为存在.

避开证明 (4) 的解存在而得到抛物方程 Александров 型极值原理估计的证明由 [34] 与 [48] 给出。其想法与 [32] 类似.

[48] 的证明相当简单，而 [34] 的证明在取极限上很繁. 由于在第十章中我们要用到 [34] 证明的主要细节，因此下面还是陈述来源于 [34]，并加以严格化的证明.

定理 1 设 $z(x,t)$ 是对 x 为凹，对 t 为单调减少的函数于 $(x,t) \in \bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0,T]$，其中 Ω 为有界凸区域，$\partial\Omega \in C^2$，并满足 $z \in C^{2,1}(\bar{Q})$，$z|_{\partial^* Q} = 0$. $\partial^* Q$ 为 Q 的抛物边界，即 $\partial^* Q = \Omega \times \{t=0\} \cup \partial\Omega \times [0,T]$. 则有

$$[-z(x^0,T)]^{n+1} \leqslant \frac{(n+1)R^n}{\kappa_n}\int_Q -z_t \det(z_{x_ix_j})\,dx\,dt, \quad \forall x^0 \in \Omega \tag{5}$$

其中 R 为 Ω 的直径，κ_n 为 n 维单位球体积.

证 先证

$$\int_\Omega -z\det(z_{x_ix_j})dx|_{t=T} = (n+1)\int_Q -z_t\cdot\det(z_{x_ix_j})dxdt, \tag{6}$$

暂设 $z\in C^{3,1}(\bar{Q})$，$\partial\Omega\in C^3$. 由于

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega z\det(z_{x_ix_j})dx - \int_\Omega z_t\det(z_{x_ix_j})dx$$

$$=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega zz_{x_ix_jt}\frac{\partial}{\partial z_{x_ix_j}}\det(z_{x_ix_j})dx$$

右端对 x_i，x_j 分部积分，并应用恒等式

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial z_{x_ix_j}}\det(z_{x_ix_j})=0,\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{7}$$

得到上式右端

$$=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega z_{x_ix_j}z_t\frac{\partial}{\partial z_{x_ix_j}}\det(z_{x_ix_j})dx = n\int_\Omega z_t\det(z_{x_ix_j})dx,$$

上面最后等式的成立是用了齐次函数的 Euler 公式. 因此得到:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega z\det(z_{x_ix_j})dx=(n+1)\int_\Omega z_t\det(z_{x_ix_j})dx. \tag{8}$$

(6) 由 (8) 立即得出.

当 $z\in C^{2,1}(\bar{Q})$ 时，作 z 的 $C^{3,1}(\bar{Q})$ 逼近函数，$\partial\Omega$ 也作 C^3 逼近. 得到 (6) 后再取极限，因而 (6) 对 $z\in C^{2,1}(\bar{Q})$，$\partial\Omega\in C_2$ 亦成立.

补证恒等式 (7).

引理 2 设自变量为 $x_0,\cdots,x_{n+1}$ 的 n 维向量 $F:\boldsymbol{R}^{n+1}\to\boldsymbol{R}^n$，每一支量为 C^∞ 函数，记

$$A_i=\det\left[\frac{\partial F}{\partial x_0},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_{i-1}},\frac{\partial F}{\partial x_{i+1}},\cdots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right],$$

则有

$$\sum_{i=0}^n(-1)^i\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=0.$$

证 假定 $i, j \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $i \neq j$. 当 $i < j$ 时记

$$C_{ij} = \det\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial F}{\partial x_0}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial F}{\partial x_{i+1}}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_{j-1}}, \frac{\partial F}{\partial x_{j+1}}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right],$$

当 $i > j$ 时,记 $C_{ij} = C_{ji}$. 由行列式性质得:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{j<i} (-1)^j C_{ij} + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} C_{ij}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma(i, j) C_{ij}$$

其中

$$\sigma(i, j) = \begin{cases} 1, & j < i, \\ 0, & j = i, \\ -1, & j > i. \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} \sigma(i, j) C_{ij},$$

由于 $\sigma(i, j) = -\sigma(j, i)$, $C_{ij} = C_{ji}$ 得到

$$\sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} \sigma(i, j) C_{ij} = \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} \sigma(j, i) C_{ji}$$

$$= (-1) \sum_{i,j=0}^{n} (-1)^{i+j} \sigma(i, j) C_{ij},$$

即有

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial A_i / \partial x_i = 0.$$

引理得证.

引理中 $n+1$ 用 n 代替,并取

$$F = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_{i-1}}, \frac{\partial z}{\partial x_{i+1}}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right),$$

就得到 (7). 引理证毕.

继续定理 1 的证明 设凹函数 $z_1(x)$，$z_2(x)\in C^2(\bar{\Omega})$ 且满足 $z_1|_{\partial\Omega}=z_2|_{\partial\Omega}=0$，$z_1\geqslant z_2$ 于 $\bar{\Omega}$，则由 (8) 得：

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}[tz_1+(1-t)z_2]\det\{[tz_1+(1-t)z_2]_{x_ix_j}\}dx$$

$$=(n+1)\int_{\Omega}(z_1-z_2)\det\{[tz_1+(1-t)z_2]_{x_ix_j}\}\cdot dx\geqslant 0,$$

t 由 0 到 1 积分得：

$$\int_{\Omega}-z_1\det(z_{1x_ix_j})dx\leqslant\int_{\Omega}-z_2\det(z_{2x_ix_j})dx \tag{9}$$

记 $z(x^0,T)=z^0$ ($x^0\in\Omega$). 以 (x^0,z^0) 为顶点，Ω 为底的锥面记为 $w(x)$. 由于 $w(x)$ 不够光滑，在顶点附近用下述的小片光滑曲面代替. 于球坐标 (r,ω) 之下，设 $\partial\Omega$ 的方程为 $r=r_0(\omega)$，记 $x=x^0+r\omega$，取

$$w^\delta(x)=\begin{cases}\left[1-\dfrac{r}{r_0(\omega)}\right]z^0, & \delta r_0(\omega)\leqslant r\leqslant r_0(\omega),\\ \left\{1-\delta+\dfrac{2}{\pi}\delta\sin\left[\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{\delta}\dfrac{r}{r_0(\omega)}\right)\right]\right\}z^0, & \\ \qquad 0\leqslant r<\delta r_0(\omega), & \end{cases}$$

并记 $\Omega_\delta=\{x=x^0+r\omega\,|\,0\leqslant r\leqslant\delta r_0(\omega)\}$，显然有 $w^\delta(x)\in C^2(\bar{\Omega})$ 且

$$w^\delta(x)\geqslant w(x)\geqslant z(x,T).$$

(9) 中取 $z_2=z(x,T)$，$z_1=w^\delta(x)$ 得：

$$\int_{\Omega}-z\det(z_{x_ix_j})dx\Big|_{t=T}\geqslant\int_{\Omega}-w^\delta(x)\det(w^\delta_{x_ix_j})dx$$

$$=\int_{\Omega_\delta}-w^\delta(x)\det(w^\delta_{x_ix_j})dx$$

$$\geqslant-(1-\delta)z^0\int_{\Omega_\delta}\det(w^\delta_{x_ix_j})dx$$

$$=-(1-\delta)z^0\int_{\omega}dp_1\cdots dp_n=-(1-\delta)z^0\,\mathrm{mes}\,\omega, \tag{10}$$

其中 $p_i=\dfrac{\partial w^\delta}{\partial x_i}$，$(1\leqslant i\leqslant n)$. ω 为 Ω_δ 在变换 $p_i=p_i(x)$ 下的

映象区域. $p=(p_1,\cdots,p_n)\in\omega$ 的充要条件是，切平面 $z=p(x-x^0)+z^0$ 在 $\Omega\times\{z=0\}$ 的下方，即

$$z^0+p(x-x^0)<0,\quad \forall x=\Omega.$$

Ω 的直径为 R，故可设 $\Omega\subset B_R=\{x\mid |x|<R\}$，$\omega\supset\omega_R$，$\omega_R$ 为满足 $z^0+p(x-x^0)<0,\forall x\in B_R$ 的 p 集合构成的区域，即 $p\in\omega_R$ 满足 $|p|R\leqslant px^0-z^0$. 满足这式子的 ω_R 为一椭球体，易算出

$$\operatorname{mes}\omega\geqslant\operatorname{mes}\omega_R=\kappa_n\frac{R(-z^0)^n}{(R^2-|x^0|^2)^{(n+1)/2}}\geqslant\kappa_n\frac{(-z^0)^n}{R^n}\tag{11}$$

其中 κ_n 为 n 维单位球的体积.

联合 (6), (10), (11) 并令 $\delta\to 0$ 得到 (5). 定理证毕.

§2 凹函数的若干性质

为了我们下面的需要，应对凹函数作一定的考察.

凹函数 $z(x)\in C(\Omega)$ 的定义区域总设为凸的. 否则可按 $u(x)=\inf\sum\lambda_i u(x^i)$，$\forall\lambda_i\geqslant 0$，$x^i\in\Omega$，$\sum\lambda_i=1$，$\sum\lambda_i x^i=x$ 延拓 $u(x)$ 的定义到 Ω 的凸包区域，即包含 Ω 的最小凸区域. 再一般地设 Ω 于 $\boldsymbol{R}^n$ 中为有界.

作光滑化逼近 $z_\varepsilon(x)=\int z(x-y)K_\varepsilon(y)dy\in C^\infty$，其中 $K_\varepsilon(y)$ 是半径为 ε 的光滑化核. 易见 $z_\varepsilon(x)$ 仍为凹，但 $z_\varepsilon(x)$ 的定义域 Ω_ε 比 Ω 稍小. 这样形成了光滑的凹函数系. 因此也应考察凹函数列.

引理 3 定义于有界凸区域 Ω 中的凹函数列 $\{z_j(x)\}_{j=1}^\infty$，设 $z_j(x)\to z(x)(j\to\infty,\ \forall x\in\Omega)$. 则于内闭有界区域中 $z_j(x)$ 为一致有界，且满足一致的 Lip 条件，又收敛为内闭一致.

注 $z(x)$ 为凹可由 $z_j(x)\to z(x)$ 得出.

证 先证 $\sup\limits_{\{x\in\Omega\mid d(x,\partial\Omega)\geqslant a\}}|z_j(x)|$ 为有界 (a 为常数). 如果不

然，有 x^j 使 $z_j(x^j)\to\infty$，$d(x^j,\partial\Omega)\geqslant a$，$j=1,2,\cdots$. $\{x^j\}$ 有聚点 x^0. 不失一般性设 $x^j\to x^0$. 取 $X^i\in\Omega(0\leqslant i\leqslant n)$ 使 x^0 在 $X^0,\cdots,X^n$ 作成的锥体内，则可设 x^j 全在此锥体内。 $z_j(X^i)$ $(0\leqslant i\leqslant n,j\geqslant 1)$ 有上界 M. 因此

$$x^j=\sum_{i=0}^{n}\lambda_{ij}X^i\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_{ij}=1\right),$$

故有

$$z_j(x^j)\leqslant\sum_i\lambda_{ij}z_j(X^i)\leqslant\sum\lambda_{ij}M=M.$$

再取 X^{n+1} 使 X^{n+1} 在 $x^0,X^1,\cdots,X^n$ 作成的锥体内，且 X^{n+1} 很接近 x^0，使表示式

$$X^{n+1}=\lambda_0x^0+\sum_{i=1}^{n}\lambda_iX^i\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1\right)$$

有 $\lambda_0\geqslant 3/4$，则

$$X^{n+1}=\lambda_{0j}x^0+\sum\lambda_{ij}X^i\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_{ij}=1\right)$$

有 $\lambda_{0j}\geqslant 1/2$. 因而 $z_j(X^{n+1})\leqslant\lambda_{0j}z_j(x^j)+\sum\lambda_{ij}z_j(X^i)$,

$$z_j(x^j)\geqslant\frac{1}{\lambda_{0j}}\left[z_j(X^{n+1})-\sum\lambda_{ij}z_j(X^i)\right],$$

上式右端有下界. 上面两方面结合得到，$z_j(x^j)\to\infty$ 为不可能.

再当 $d(x^i,\partial\Omega)\geqslant 2a(i=1,2)$ 时，x^1, x^2 与 x^2, x^1 直线段的延线上总可找到 x^3 与 x^4 使 $|x^3-x^2|=a$，$d(x^3,\partial\Omega)\geqslant a$；$|x^4-x^1|=a$，$d(x^4,\partial\Omega)\geqslant a$.

由凹性条件得：

$$\frac{z_j(x^1)-z_j(x^4)}{|x^1-x^4|}\leqslant\frac{z_j(x^2)-z_j(x^1)}{|x^2-x^1|}\leqslant\frac{z_j(x^3)-z_j(x^2)}{|x^3-x^2|}$$

因此有：

$$\sup_{\substack{d(x^i,\partial\Omega)\geqslant 2a\\ i=1,2}}\left|\frac{z_j(x^2)-z_j(x^1)}{x^2-x^1}\right|\leqslant\frac{2}{a}\sup_{d(x,\partial\Omega)\geqslant a}|z_j(x)|=K_a,$$

内闭一致 Lip 条件得证. 内闭一致收敛由内闭一致 Lip 条件导

出。引理得证。

给定有界凸区域 $\Omega\subset R^n$，凹函数 $z(x)\in C(\Omega)$. 设 $x^0\in\Omega$. 过点 $(x^0, z(x^0))$ 作支撑平面

$$x_{n+1}-z(x^0)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-x_i^0)\equiv p(x-x^0),$$

即支撑平面上的 x_{n+1} 恒满足条件

$$x_{n+1}\leqslant z(x),\quad \forall x\in\Omega.$$

由此得到映象 $x\to p=(p_1,\cdots,p_n)$，称为法线映象 (Normal map)，记为 $\nu(x)\equiv\nu(z,x)$.

仅当 $z(x)$ 处处有唯一切平面时，法线映象为唯一，否则映象不唯一，在一阶微商有间断处法线映象为多值. 逆象有时也不唯一，即当 $z(x)$ 含有平直部份时，不同的 x 处可映到同一个 p. 因此 $\nu(x)$ 为集值映象. 以下的诸讨论表明，这一集值映象又是较简单的集值映象.

考察 $M\subset\Omega$ 时，对应的集合 $\nu(M)\equiv\nu(z,M)$.

当凹函数 $z(x)\in C^2(\Omega)$ (由此 $\nu(x)$ 为唯一)时，设M为可测集，则积分

$$\int_M \det(z_{x_ix_j})dx=\int_{\nu(M)}dp_1\cdots dp_n=\operatorname{mes}\nu(M)$$

为存在. 即当M为 Lebesgue 可测时，$\nu(M)$ 也是 Lebesgue 可测，它的 Riemann 测度 $\operatorname{mes}\nu(M)$ 可由上式定出，具有完全可加性.

对一般凹函数 $z\in C(\Omega)$，上述性质基本上还是成立的，但要稍差一些. 即 M 为 Borel 可测时，$\nu(M)$ 为 Lebesgue 可测，它的 Riemann 测度 $\operatorname{mes}\nu(M)$ 为存在，数值可用光滑逼近方法取极限而得出，也具有完全可加性. 下面来证明这些事.

引理 4 凹函数 $z(x)\in C(\Omega)$，Ω 为有界凸区域. 则闭集 M $(\subset\Omega)$ 的法线映象 $\nu(M)$ 也是闭集.

证 $p^i\in\nu(M)$，$i=1,2,\cdots$，$p^i\to p^0$. 则 p^i 至少有一原象 $x^i\in M$，$M\subset\Omega$ 为有界，由引理 3 得到 $\{x^i\}$ 为一致有界，必有子列

收敛．子列就记为本身，则 $x^j \to x^0$，由 M 为闭得 $x^0 \in M$．由

$$z(x^j) + p^j(x - x^j) \leqslant z(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

取极限得：

$$z(x^0) + p^0(x - x^0) \leqslant z(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

因此 $p^0 \in \nu(M)$，即 $\nu(M)$ 为闭．证毕．

开集的映象不恒是开集．例如开集 $\omega \subset \Omega$，ω 对应的 $z(x)$ 全在一固定平面上，则 $\nu(\omega)$ 为一点．但可证明开集的映象恒为可测．这用取补集再结合引理 4 来证明（见下面推论 7)．要证明可测集的补集为可测，先换一个法线映象使映象后总集合测度为有限．

有界闭凹曲面 K 上点 x，支撑曲面法线为 $(p_1, \cdots, p_n)$，点 x 向单位球面 S_n 上的映象

$$x \to \left(\frac{p_1}{\sqrt{1 + \sum p_i^2}}, \cdots, \frac{p_n}{\sqrt{1 + \sum p_i^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1 + \sum p_i^2}}\right)$$

记为 $\mu(K)$．则

$$\text{mes}\, \mu(M) = \int_M \frac{\nu(dx)}{\sqrt{1 + \sum p_i^2}},$$

$$\text{mes}\, \nu(M) = \int_M \sqrt{1 + \sum p_i^2}\, \mu(dx),$$

因此 $\nu(M)$ 为可测与 $\mu(M)$ 为可测可相互导出．

在曲面 K 上添一个盖子 K_+：$z = z_+(x)$ 由

$$z_+(x) = \sup \sum \alpha_i z(x^i), \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum \alpha_i = 1,$$

$$x^i \in \partial K, \quad \sum \alpha_i x^i = x$$

定出．易证 K 与 K_+ 联合作成的曲面为外凸与闭的，仍记为 K．一方面 $\mu(K) \subseteq S_n$．另一方面 S_n 上任一方向 l 为法线做平面 π，此平面平移时总有两次与 K 接触，其中之一的接触点以 π 为支撑平面，因此 $S_n \subseteq \mu(K)$．因而 $\mu(K) = S_n$．S_n 的测度 ω_n 是 n 维单位球面面积，因此为有限．

引理 5 K 上至少有二点（因 K 为凸，因此至少有一线段）映于 S_n 上同一点的集合记为 N，则 $\mu(N)$ 的测度为零．

证 维数 $n=1$ 时,引理结论为真. 这是因为一线段仅映于一点,K 上线段长 $\geqslant 1/k$ $(k=1,2,\cdots)$ 的至多为有限个,因此 N 中含有线段的总数不超过可列个. 即 $\mu(N)$ 至多为可列个点. $\text{mes}\,\mu(N)=0$.

对维数用归纳法来证明引理. 取 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的 $n+1$ 个正交方向为 $L_1,\cdots,L_{n+1}$. N 中的点至少属于N中不与 L_i 正交的线段的映象记为 $M_i(\subset\mu(N))$, $1\leqslant i\leqslant n$. N 中的点属于N中与所有 $L_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 正交,即与 L_{n+1} 平行的线段的映象记为 M_{n+1},则 $\mu(N)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}M_i$.

K 中与 L_{n+1} 平行的线段维数至多为 $n-1$,因此 M_{n+1} 维数至多为 $n-1$, $\text{mes}\,M_{n+1}=0$.

任何元素 $(q_1^0,\cdots,q_{n+1}^0)\in M_1$,有支撑平面

$$\pi:\ \sum_{i=1}^{n+1}q_i^0(x_i-x_i^0)=0\quad(z(x)\equiv x_{n+1}),$$

$\pi\cap K$ 内有相异二点 $X^0=(x_1^0,\cdots,x_{n+1}^0)$, $Y^0=(y_1^0,\cdots,y_{n+1}^0)$, X^0Y^0 不与 $L_1=(1,0,\cdots,0)$ 正交(为了看得清楚,特取 $L_1=(1,0,\cdots,0)$),即 $x_1^0\neq y_1^0$.

沿支撑平面上任一方向作 K, π, X^0, Y^0 的投影 $\overline{K}$, $\bar{\pi}$, $\overline{X}^0$, $\overline{Y}^0$,则 $\bar{\pi}$ 是 $\partial\overline{K}$ 的支撑平面,且 $\bar{\pi}\cap\partial\overline{K}$ 上两点 $\overline{X}^0$, $\overline{Y}^0$ 相异(因 $\bar{x}_1^0=x_1^0\neq y_1^0=\bar{y}_1^0$),因此由归纳法假定得

$$\text{mes}\,(\text{pr}M_1)=0,\quad(\text{pr 表示投影}).$$

支撑平面内的投影方向 θ 与 L_1 正交,因此可选取为 $(0,\cos\theta,\sin\theta,0,\cdots,0)$,使它满足 $q_2^0\cos\theta+q_3^0\sin\theta=0$. 当 $q_2^{0^2}+q_3^{0^2}\neq 0$ 时,θ 于 $[0,\pi)$ 内唯一确定. 当 $q_2^0=q_3^0=0$ 时,方向 θ 任取. 因此

$$\sup_{M_1^*\subseteq M_1}\text{mes}\,M_1^*\leqslant\int_0^{2\pi}\text{mes}(\text{pr}_\theta M_1)d\theta=0,$$

故有 $\text{mes}\,M_1=0$. 同法得 $\text{mes}\,M_i=0(2\leqslant i\leqslant n)$.

$$\sup_{M^*\subseteq\mu(N)} \text{mes } M^* \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \text{mes } M_i = 0,$$

故有 $\text{mes } \mu(N)=0$. 以上考察内测度，但类似方法易证N的外测度也为零. 由归纳法得证引理成立.

引理 6 设集合 $M\subset K$, $\mu(M)$ 为可测, 则 $\mu(K\backslash M)$ 也为可测.

证 由于 $\mu(M)\cup\mu(K\backslash M)=S_n$, 故有:

$$S_n-\mu(M)\subseteq\mu(K\backslash M),$$

$$\begin{aligned}\mu(K\backslash M)&=\mu(K\backslash M)[S_n-\mu(M)+\mu(M)]\\&=S_n-\mu(M)+\mu(K\backslash M)\cap\mu(M).\end{aligned}$$

应用引理 5 得: $\text{mes }[\mu(K\backslash M)\cap\mu(M)]=0$, 因此 $\mu(K\backslash M)$ 为可测. 证毕.

推论 7 开集 $M\Subset K$, 则 $\mu(M)$ 为可测.

证 $K\backslash M$ 为闭,由引理 4 知 $\mu(K\backslash M)$ 为可测, 由引理 5 知 $\mu(M)$ 为可测. 证毕.

推论 8 任何 Borel 集 $M\subset K$, 则 $\mu(M)$ 为可测.

证 Borel 集为开集与闭集经可列次和、通、再可列次和、通、…而得出的集合. 因此由引理 4 与推论 7 出发, 只要证明当 $\mu(M_j)$ $(j=1,2,\cdots)$ 为可测时, $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j\right)$ 及 $\mu\left(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} M_j\right)$ 均为可测即可.

前者由 $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} M_j\right)=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\mu(M_j)$ 及右端为可测得出. 后者由引理 6 得到 $\mu(K-M_j)$ 为可测, $\mu\left[\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}(K-M_j)\right]$ 为可测, 再应用引理 6 得

$$\mu\left(K-\bigcup_{j=1}^{\infty}(K-M_j)\right)=\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} M_j\right)$$

为可测. 证毕.

推论 9 (测度可加性) 设 M_1、M_2 为 Borel 可测, $M_1\cap M_2=$

$\varnothing$，则

$$\operatorname{mes}\mu(M_1+M_2)=\operatorname{mes}\mu(M_1)+\operatorname{mes}\mu(M_2).$$

证 $\mu(M_1+M_2)=\mu(M_1)+[\mu(M_2)-\mu(M_1)\cap\mu(M_2)]$. 由引理 5 得 $\operatorname{mes}[\mu(M_1)\cap\mu(M_2)]=0$. 再应用推论 8 就得到所要的结果.

推论 10（**测度的完全可加性**） 设 $M_j(j=1,2,\cdots)$ 为 Borel 可测，$M_j\cap M_k=\varnothing$, $\forall j$, $k=1,2,\cdots$, $j\neq k$. 则

$$\operatorname{mes}\mu\left(\sum_{j=1}^{\infty}M_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(M_j).$$

证 由推论 9 得到

$$\operatorname{mes}\mu\left(\sum_{j=1}^{\infty}M_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{mes}\mu(M_j)+\operatorname{mes}\left(\sum_{j=k+1}^{\infty}M_j\right),\quad(12)$$

$\mu\left(\sum_{j=k+1}^{\infty}M_j\right)$ 当 $k\to\infty$ 时为单调减少集合，故有极限集合 $N\subset S^n$. 如果 $N\neq\varnothing$，N 中每点原像如为一点 $P\in K$，则 $\exists j_0$ 使 $P\in M_{j_0}$，应用 $M_k\cap M_{j_0}=\varnothing(k>j_0)$ 得：$P\notin\sum_{j_0+1}^{\infty}M_j$，因而 $\mu(P)\notin N$ 矛盾. 因此 N 中每点的原像至少有二点. 由引理 5 得 $\operatorname{mes}N=0$. (12) 中令 $k\to\infty$，引理得证.

引理 5，6 及推论 7，8，9，10，经过映象 μ 与 ν 的转换

$$\nu(M)=\int_M\sqrt{1+\sum p_i^2}\,\mu(dx),$$

知对 ν 也成立. 其中 $\nu(M)$ $(M\subset\boldsymbol{R}^n)$ 为凹函数 $z(x)\in C(\Omega)$ 的映象，Ω 为凸有界. 对定义域 Ω 非有界的情况可由取极限而得到类似的结果.

引理 11 凹函数 $z^j(x)\to z(x)(j\to\infty)$ 于凸集 Ω（Ω 可以不为有界）. $M^j(j=1,2,\cdots)$ 与 M 为 Ω 内的有界闭集，且 $M^j\to M(j\to\infty)$. 则有

$$\limsup_{j\to\infty}\omega(z^j,M^j)\leqslant\omega(z,M),\quad(13)$$

其中 $\omega(z,M)=\omega(M)=\operatorname{mes}\nu(M)$.

证 取 $\nu(M)$ 的任一邻域 G. 如能证明可找到 j_0 使

$$\nu(z^j, M^j) \subset G, \quad \forall j \geqslant j_0, \tag{14}$$

(14) 取极限即得 (13). 如果 (14) 不真，存在 $x^j \in M^j$ 使 $(x^j, z^j(x^j))$ 点的支撑平面 $x_{n+1} - z^j(x^j) = p^j(x - x^j)$ 满足 $(p_1^j, \cdots, p_n^j) \notin G$. 由 $M^j \to M$ 知 $\{x^j\}$ 为有界，可选子列 (不妨仍记为 x^j 本身)收敛于 x^0，由 M 为闭知 $x^0 \in M$. 由引理 3 知 $\{p^j\}$ 为一致有界，可选子列(不妨仍记为本身)收敛于 $p^0 \notin G$. 由

$$z^j(x) - z^j(x^j) \geqslant p^j(x - x^j),$$

取极限得

$$z(x) - z(x^0) \geqslant p^0(x - x^0),$$

即 $p^0 \in \nu(M)$，这与 $p^0 \notin G$ 矛盾. 引理证毕.

引理 12 凹函数 $z^j(x) \to z(x)$ 于凸集 Ω. $G^j (j = 1, 2, \cdots)$ 与 G 为 Ω 内的有界开集，且 $G^j \to G (j \to \infty)$，又 $\omega(z, \partial G) = 0$. 则有

$$\lim_{j \to \infty} \omega(z^j, G^j) = \omega(z, G),$$

$$\lim_{j \to \infty} \omega(z^j, \partial G^j) = 0.$$

证 由于 G^j, G 均在 Ω 的一个有界部分内，故可设 Ω 为有界. $K^j = \{z^j(x) \mid x \in \Omega\}$ 加上盖子成为整个外凸曲面仍记为 K^j. μ^j 映 K^j 到 S^n. 在这一映象下，引理 11 仍成立. 引理 11 取补再回到映象 ν 成为

$$\liminf_{j \to \infty} \omega(z^j, G^j) \geqslant \omega(z, G),$$

再由引理 11 得

$$\limsup_{j \to \infty} \omega(z^j, \overline{G}^j) \leqslant \omega(z \overline{G}),$$

结合 $\omega(z, \partial G) = 0$ 得：

$$\limsup_{j \to \infty} \omega(z^j, \overline{G}^j) \leqslant \omega(z, \overline{G}) = \omega(z, G) \leqslant \liminf_{j \to \infty} \omega(z^j, G^j).$$

因此得到所要的二个结论. 证毕.

有界凸集上的凹函数 $z(x)$，可仿一般定义积分的方法作出

积分 $\int_\Omega f\omega(z, dx)$，至少在近边处 $\nu(z, \bar{\Omega}\backslash M)$（闭集 $M\subset\Omega$）无集中测度或 $f\in \mathring{C}(\Omega)$（即 $f\in C(\Omega)$，且 f 在 Ω 中具紧支集）时 $\int_\Omega f(x)\omega(z, dx)$ 为存在. 后一情况又可记为 $\int_{M_f} f(x)\omega(z, dx)$，其中 M_f 是 f 的支集，且 $f|_{\partial M_f}=0$.

引理 13 凹函数列 $z^j(x)\to z(x)$ 于凸集 Ω. 则 $\omega(z^j)$ 弱收敛于 $\omega(z)$. 即 $\forall f\in \mathring{C}(\Omega)$ 或当 $\nu(z^j, \bar{\Omega}\backslash M)$（闭集 $M\subset\Omega$）无集中测度时，$\forall f\in C(\Omega)$，有

$$\int_\Omega f\omega(z^j, dx)\to\int_\Omega f\omega(z, dx),\quad 当\ j\to\infty.$$

证 $\omega(z, \Omega\cap\{x_i=x_i^0\})\geqslant 1/k$ 的 x_i^0 至多只有 $k\omega(z, M_f)$ 个. 因此 $\omega(z, \Omega\cap\{x_i=x_i^0\})>0$ 的 $x_i^0\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 至多只有可列无限个. $\omega(z^j, \Omega\cap\{x=x_i^0\})>0$ 的 $x_i^0(1\leqslant i\leqslant n,\ j=1, 2, \cdots)$ 也至多只有可列无限个. 因此坐标不属于上述二种可列无限个数所构成的长方体于 Ω 内为处处稠密的. 由于 f 为一致连续，$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 使 $|f(x)-f(\tilde{x})|\leqslant\varepsilon$ 当 $|x-\tilde{x}|\leqslant\delta$.

分割 M_f 为 L_ε 个上述长方体. $f\in\mathring{C}(\Omega)$ 情况下，破长方体因 f 在 M_f 外为零，故可补 M_f 外的部分成为整个长方体，使长方体直径不超过 δ. 每个长方体 M^l 中固定一点 $x^l(1\leqslant l\leqslant L_\varepsilon)$. 另一情况下破长方体仍旧.

应用引理 12 得：$\omega(z^j, M^l)=\omega(z^j, \bar{M}^l)$，故得到

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega f\omega(z^j, dx)-\int_\Omega f\omega(z, dx)\right|\\&\leqslant\sum_{l=1}^{L_\varepsilon}|f(x^l)||\omega(z^j, M^l)-\omega(z, M^l)|\\&\quad+\varepsilon[\omega(z^j, M_f)-\omega(z, M_f)],\end{aligned}$$

上式的成立应用了积分可加性. 再应用引理 12 与引理 11 得到上式右端当 $j\to\infty$ 时的上限 $\leqslant 2\varepsilon\omega(z, M_f)$. 再令 $\varepsilon\to 0$ 得到引理的结论.

还要研究凹函数的延拓等事.

引理 14 设Ω为有界凸区域，$\partial\Omega$为分片C^1.凹函数$z(x)\in C(\bar{\Omega})$且$z(x)|_{\partial\Omega}=0$，$z(x)$于$\bar{\Omega}$满足 Lip 条件．则$z(x)$可保凹延拓到$\boldsymbol{R}^n$使$z(x)>0$于$\boldsymbol{R}^n\backslash\bar{\Omega}$．延拓后的$z(x)$仍满足 Lip 条件，Lip 系数仅增大常数倍．

证 不妨设原点O在Ω内．记$d(O,\partial\Omega)=d_0$．$z(x)$满足

$$|z(x)-z(\tilde{x})|\leqslant N|x-\tilde{x}|,\quad \forall x,\tilde{x}\in\bar{\Omega}.$$

设Ox交$\partial\Omega$于y，则

$$z(x)=Nd_0\left(\frac{|x|}{|y|}-1\right)\quad (x\in\boldsymbol{R}^n\backslash\bar{\Omega})$$

是合于要求的延拓．

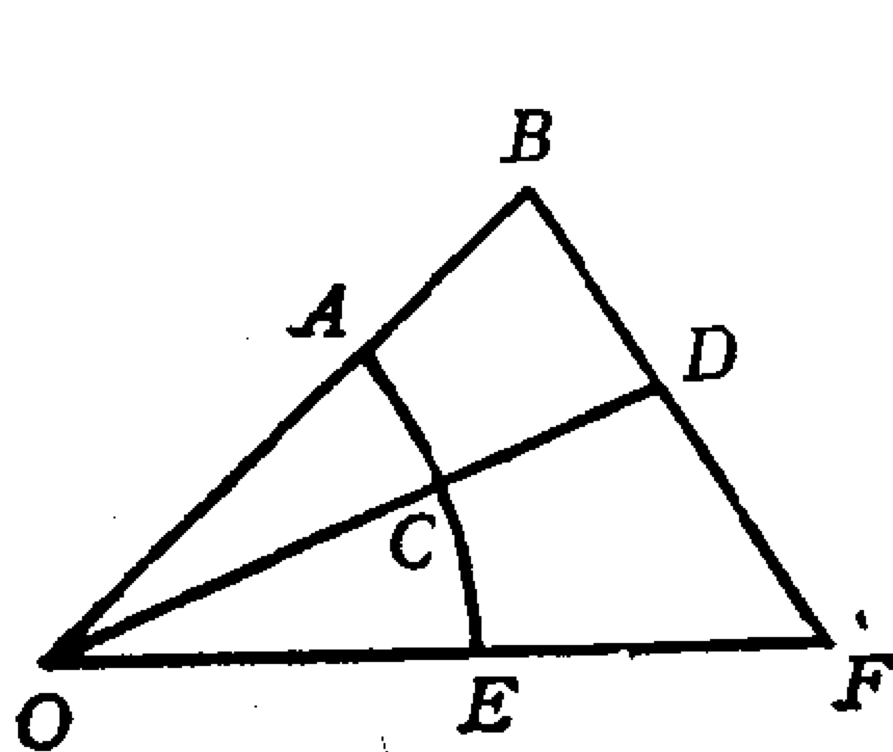


图 7.1

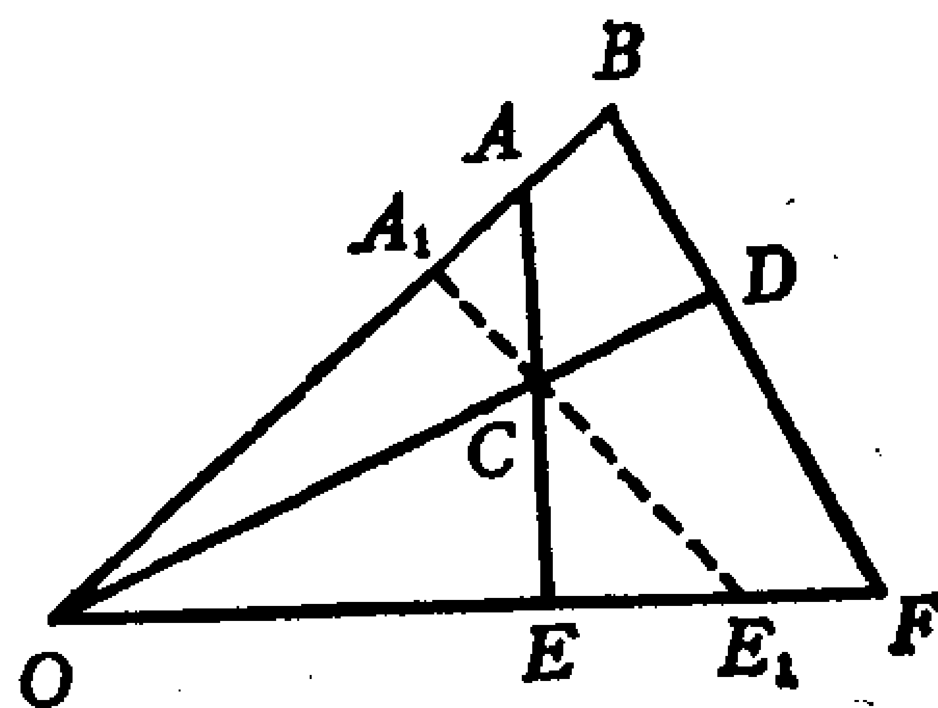


图 7.2

先证$z(x)$于Ω外为凹(见图 7.1)．就是要证明

$$\frac{CD}{OC}\leqslant\frac{AB}{OA}\frac{DF}{BF}+\frac{EF}{OE}\frac{BD}{BF}.$$

由$\partial\Omega$为凸知C在AE连线上时使上式左端为最大．要证明此情况下有

$$\frac{CD}{OC}=\frac{AB}{OA}\frac{DF}{BF}+\frac{EF}{OE}\frac{BD}{BF},\tag{15}$$

两边加 1，得到 (15) 等价于

$$\frac{OD}{OC}=\frac{OB}{OA}\frac{DF}{BF}+\frac{OF}{OE}\frac{BD}{BF},$$

作 $A_1CE_1 /\!/ BDF$ (见图 7.2)，则 $OB = OA_1\dfrac{OD}{OC}$, $OF = OE_1\dfrac{OD}{OC}$.
因而 (15) 等价于

$$1 = \frac{OA_1}{OA}\frac{DF}{BF} + \frac{OE_1}{OE}\frac{BD}{BF},$$

或

$$\frac{A_1A}{OA}DF = \frac{EE_1}{OE}BD.$$

由于 $\dfrac{DF}{BD} = \dfrac{CE_1}{A_1C}$, 因而 (15) 等价于

$$\frac{AA_1}{OA}\frac{CE_1}{A_1C}\frac{ED}{E_1E} = -1, \tag{16}$$

(16) 是三角形的 Menelaus 定理，故为真，因而 (15) 成立.

再证 $z(x)$ 跨过 $\partial\Omega$ 为凹(参见图 7.3).

图 7.3

即 $\forall x^1 \in \Omega$, $x^2 \in \boldsymbol{R}^n \backslash \Omega$, $y \in \overline{x^1x^2} \cap \partial\Omega$, 要证明

$$\overline{yx^2}z(x^1) + \overline{x^1y}z(x^2) \geqslant 0 \tag{17}$$

设 $\overline{Ox^2}$ 交 $\partial\Omega$ 于 y^2. 作 $\overline{x^1y^1} /\!/ \overline{y^2x^2}$, $y^1 \in \partial\Omega$, $\overline{x^1y^1}$ 延线交 $\overline{y^2y}$ 延线于 $\tilde{x}$. 则

$$|z(x^1)| = |z(x^1) - z(y^1)| \leqslant N\,\overline{x^1y^1} \leqslant N\,\overline{x^1\tilde{x}}$$

$$= N\overline{y^2x^2}\,\frac{\overline{x^1y}}{\overline{yx^2}} = \frac{\overline{x^1y}}{\overline{yx^2}}\cdot\frac{\overline{Oy^2}}{d_0}z(x^2) \leqslant \frac{\overline{x^1y}}{\overline{yx^2}}z(x^2)$$

即 (17) 成立。

最后研究延拓的 $z(x)$ 满足 Lip 条件的问题.这可就 $(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(0,\cdots,0,x_n)$ 附近来考察。

$\partial\Omega$ 的方程局部地写成 $y_n=f(y_1,\cdots,y_{n-1})$.记 $\frac{|x|}{|y|}=r$，则

$$r=\frac{x_1}{y_1}=\cdots=\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}=\frac{x_n}{y_n},$$

因此

$$rf\left(\frac{x_1}{r},\cdots,\frac{x_{n-1}}{r}\right)-x_n\equiv g(x_1,\cdots,x_n,r)=0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial r}=f\left(\frac{x_1}{r},\cdots,\frac{x_{n-1}}{r}\right)-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i}{r}\frac{\partial f}{\partial x_i}\approx f>0,$$

故由隐函数定理可解出 r 为 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的分片 C^1 函数。

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=-\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/\left(f-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i}{r}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

$$(1\leqslant i\leqslant n-1),$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_n}=\frac{-1}{f-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i}{r}\frac{\partial f}{\partial x_i}}.$$

因此延拓后的 $z(x)$ 满足 Lip 条件，且 Lip 系数为N的常数倍. 引理证毕。

引理 15 在引理 14 的假设下，存在凹函数列 $z_k(x)$ 与凸区域列 $\Omega_k(k=1,2,\cdots)$，使 $z_k(x)\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，$\partial\Omega_k\in C^\infty$，$z_k|_{\partial\Omega_k}=0$，$\Omega_{k+1}\subset\Omega_k(\forall k\geqslant 1)$，$\Omega=\bigcap_{k=1}^{\infty}\Omega_k$，$z_k(x)\to z(x)(k\to\infty,\forall x\in\boldsymbol{R}^n)$.

证 由引理 14 延拓 z 到 $\boldsymbol{R}^n$ 为凹，用归纳法作出 Ω_k 与 z_k $(k=1,2,\cdots)$. 当 Ω_k, z_k 已作出时，记 $d(\partial\Omega_k,\partial\Omega)=\delta_k$. 作 z 的光滑化逼近 z^{k+1}，光滑化半径为 η_k. 则

$$z^{k+1}|_{\partial\Omega} \leqslant Nd_0 \cdot \frac{\eta_k}{\min\limits_{\partial\Omega}|y|}, \quad z^{k+1}|_{\partial\Omega} \geqslant Nd_0 \frac{\delta_k - \eta_k}{\max\limits_{\partial\Omega}|y|},$$

取 η_k 使

$$\left(1 + \frac{\max\limits_{\partial\Omega}|y|}{\min\limits_{\partial\Omega}|y|}\right)\eta_k < \delta_k.$$

记

$$\sigma^{k+1} = \frac{Nd_0}{2}\left(\frac{\eta_k}{\min\limits_{\partial\Omega}|y|} + \frac{\delta_k - \eta_k}{\max\limits_{\partial\Omega}|y|}\right).$$

令

$$z_{k+1} = z^{k+1} - \sigma^{k+1}, \quad \Omega_{k+1} = \{x \mid z_{k+1}(x) < 0\}.$$

则易证 z_{k+1}, Ω_{k+1} 合于引理的要求. 例如证 Ω_k 为凸. 由于 z_k 为凹, $\forall x^0 \in \partial\Omega_k$ 有 $p(x - x^0) + z \geqslant 0$, 令 $z = 0$ 得 $p(x - x^0) \geqslant 0$, 即 $\partial\Omega_k$ 总在支撑平面的同一侧. 因此 $\partial\Omega_k$ 为凸.

归纳法的开始,取 Ω_0 为包含 Ω 的一球体即可. 引理证毕.

§3 凹包函数的讨论

定义 $u(x)$ 定义于区域 Ω 或 $\bar{\Omega}$. 按

$$\check{u}(x) = \inf \sum \lambda_i u(x^i), \ (\forall \lambda_i, x^i \text{ 使 } \lambda_i \geqslant 0, \sum \lambda_i = 1, \ x^i \in \Omega \text{ 或 } \bar{\Omega}, \ \sum \lambda_i x^i = x)$$

定出函数 $\check{u}(x)$. $\check{u}(x)$ 的定义区域 Ω_0 是 Ω 的凸包区域(即包含 Ω 的最小凸区域). $\check{u}(x)$ 称为 $u(x)$ 的下凹包函数或简称下凹包. 点集 $\{x \mid u(x) = \check{u}(x)\}$ 称为 u 的下接触集.

引理 16 当 Ω 为有界凸集, $u(x) \in C(\bar{\Omega})$ 时,则下凹包 $\check{u}(x) \in C(\bar{\Omega})$.

注 可举例说明 u 在 $\bar{\Omega}$ 不连续时, 则 $\check{u}(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 也是不连续的. 因此本引理是需要证明的.

例 $\Omega = (0, 1)$, $\bar{\Omega} = [0, 1]$, $u(0) = 0$, $u(x) = 1$ $(0 <$

$x \leqslant 1$)，则 $\check{u}(x) = u(x)$ 于 $[0, 1]$ 为不连续.

证 $\forall \varepsilon > 0$，可找到 $\delta(\varepsilon) > 0$ 使

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \varepsilon, \text{ 当 } |x - y| \leqslant \delta, \ \forall x, y \in \bar{\Omega}.$$

由 $\check{u}(x)$ 的定义，知可找到 N 与 $\lambda_0, \cdots, \lambda_N$, $x^0, \cdots, x^N$ 使

$$\check{u}(x) \geqslant \sum_{i=0}^{N} \lambda_i u(x^i) - \varepsilon, \quad x = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i x^i,$$

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

当 $x \in \partial\Omega$ 而 $|x - y| \leqslant \delta$ 时，

$$\check{u}(y) \leqslant u(y) \leqslant u(x) + \varepsilon = \check{u}(x) + \varepsilon.$$

当 $x \in \Omega$, $|x - y| \leqslant \min(\delta/2, d(x, \partial\Omega))$ 时，于 $\overline{xy}$ 的延线上取点 z，则

$$y = (1 - \mu)x + \mu z, \quad (0 < \mu < 1),$$

$$y = \sum (1 - \mu)\lambda_i x^i + \mu z,$$

由 $\sum (1 - \mu)\lambda_i + \mu = 1$ 得:

$$\begin{aligned} \check{u}(y) &\leqslant \sum (1 - \mu)\lambda_i u(x^i) + \mu u(z) \\ &\leqslant (1 - \mu)[\check{u}(x) + \varepsilon] + \mu u(z) \\ &\leqslant \check{u}(x) + \varepsilon + 2\mu M, \end{aligned}$$

$$M = \max_{\bar{\Omega}} |u(x)|.$$

上面两式结合得

$$\check{u}(y) - \check{u}(x) \leqslant \varepsilon + 2\mu M \leqslant 2\varepsilon,$$

当取 z 接近 y 使 $\mu \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$ 时.

交换 x 与 y 的不等式再结合上式得

$$|\check{u}(x) - \check{u}(y)| \leqslant 2\varepsilon.$$

因而 $\check{u}(x) \in C(\bar{\Omega})$. 引理证毕.

设凸集 Ω 为有界，$x^\sigma \in \Omega$ 而 $\check{u}(x^\sigma) < u(x^\sigma)$ 时，$(x^\sigma, \check{u}(x^\sigma))$ 点所有支撑平面的交集称为 $\check{u}(x)$ 于 x^σ 点的支撑集. 支撑集与 $u(x)$ 的接触点集记为 $D(x^\sigma)$.

引理 17 当 $x^\sigma \in \Omega$ 而 $\check{u}(x^\sigma) < u(x^\sigma)$ 时，必存在 N, λ_i 与

$x^i(0\leqslant i\leqslant N)$ 使 $N\leqslant n$, $\lambda_i>0$, $\sum_0^N \lambda_i=1$, $x^i\in D(x^\sigma)$,

$$\sum_0^N \lambda_i x^i = x^\sigma,\ \ \check{u}(x^\sigma)=\sum_0^N \lambda_i u(x^i).$$

证 $\forall\varepsilon>0$, $\exists M$, μ_i, $X^i(0\leqslant i\leqslant M)$ 使 $\mu_i>0$,

$$\sum_0^M \mu_i=1,\ X^i\in\bar{\Omega},\ \ \sum_0^M \mu_i X^i=x^\sigma,$$

$$\sum_0^M \mu_i u(X^i)\leqslant \check{u}(x^\sigma)+\varepsilon.$$

当支撑集为唯一的平面π时,π上x点的函数值记为 $z_\pi(x)$ 则由上式得:

$$\sum_0^M \mu_i z_\pi(X^i)\leqslant \check{u}(x^\sigma)+\varepsilon. \tag{18}$$

$D(x^\sigma)$ 中必然有 $n+1$ 个接触点 $y^0,\cdots,y^n$ 及常数 $\nu_0,\cdots,\nu_n$ 使 $\nu_i>0$, $\sum\nu_i=1$, $\sum_0^n \nu_i y^i=x^\sigma$, 否则支撑面可转动而非唯一. 由 $u(y^i)=z_\pi(y^i)$ $(0\leqslant i\leqslant M)$ 及

$$\sum_0^n \nu_i z_\pi(y^i)=\sum_0^M \mu_i z_\pi(X^i)$$

代入(18)得:

$$\sum_0^n \nu_i u(y^i)\leqslant \check{u}(x^\sigma)+\varepsilon,$$

y^i 与 ν_i 均依赖于 ε. 当 $\varepsilon\to 0$ 时, y^0 取子列收敛于 $x^0\in D(x^\sigma)$, 子列中 ν_0 再取子列收敛于 λ_0, y^1 再取子列收敛于$x^1\in D(x^\sigma),\cdots$. 取极限得到

$$\sum_0^n \lambda_i u(x^i)\leqslant \check{u}(x^\sigma),$$

结合

$$\check{u}(x^\sigma)\leqslant \sum_0^n \lambda_i \check{u}(x^i)\leqslant \sum_0^n \lambda_i u(x^i),$$

得到引理的结论.

一般情况下,支撑集 π_* 是所有支撑平面 π 的交集, π_* 在 x 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的投影记为 $\boldsymbol{R}^{n*}$, $\Omega\cap\boldsymbol{R}^{n*}$ 记为 Ω_*. 作(18)于 $\boldsymbol{R}^{n*}$ 上的投影得:

$$\sum_0^M \mu_i z_{\pi_*}(X_*^i)\leqslant \check{u}(x^\sigma)+\varepsilon,$$

其中 X_*^i 是 X^i 的投影,又 $\sum_0^M \mu_i X_*^i=x^\sigma$. 用 $\boldsymbol{R}^{n*}$, Ω_*, X_*^i, π_* 代替(18)中的 $\boldsymbol{R}^n$, Ω, X^i, π, 同样做法得到

$$\sum_0^{n_*}\lambda_i u(x^i)=u(x^\sigma).$$

引理证毕.

引理 18 当 Ω 为有界凸集, $u(x)$ 于 $\bar{\Omega}$ 为 Lip 连续时, 则 $\check{u}(x)$ 于 $\bar{\Omega}$ 也是 Lip 连续的,且有同一的 Lip 系数.

证 $\forall x^1$, $x^2\in\bar{\Omega}$ 有

$$|u(x^2)-u(x^1)|\leqslant\sum_{k=1}^N|u(y^k)-u(y^{k-1})|,$$

其中 $y^0=x^1, y^N=x^2, y^1,\cdots,y^{N-1}$ 均在 $\overline{x^1x^2}$ 上,并取为使 $\overline{y^{k-1}y^k}$ 段 $\check{u}=u$ 或 $\overline{y^{k-1}y^k}$ 段 $\check{u}$ 用引理 17 的同一表示. 在 $\check{u}$ 用引理 17 的同一表示段有

$$\left|\frac{\check{u}(y^k)-\check{u}(y^{k-1})}{y^k-y^{k-1}}\right|\leqslant\max_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant M\\ i\neq j}}\left|\frac{u(X^i)-u(X^j)}{X^i-X^j}\right|,$$

因此当 u 满足 Lip 条件, Lip 系数为 K 时有:

$$|\check{u}(x^2)-\check{u}(x^1)|\leqslant K\sum_{k=1}^N|y^k-y^{k-1}|=K|x^2-x^1|.$$

引理证毕.

设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界凸区域, $Q=\Omega\times(0,T]$. 对 $u\in C(\bar{Q})$, 令

$$\tilde{u}(x,t)=\inf_{0\leqslant\tau\leqslant t}u(x,\tau),\quad\forall(x,t)\in\bar{Q}.$$

再作 $\tilde{u}(x,t)$ 对 x 的下凹包 $\check{u}(x,t)$. 则有:

引理 19 当 $u\in C(\bar{Q})$ 时，$\check{u}$ 关于 t 为单调不增且 $\tilde{u},\check{u}\in C(\bar{Q})$. 又当 u 于 $\bar{Q}$ 满足 Lip 条件，则 $\tilde{u}$ 与 $\check{u}$ 于 $\bar{Q}$ 也满足 Lip 条件，且 Lip 系数不变.

证 应用引理 16 与 18，其它易证.

引理 20 设 $u\in C^{2,1}(\bar{Q})$. 则当 $\dfrac{\partial\check{u}}{\partial t}$ 存在时，

$$-\frac{\partial\check{u}}{\partial t}\leqslant\begin{cases}\max\left(0,\ -\dfrac{\partial u}{\partial t}\right),\ (x,t)\in Q\cap\{(x,t)\mid\check{u}=\tilde{u}\},\\ \sup\limits_{y\in D_t(x)}\max\left(0,\ -\dfrac{\partial u(y,t)}{\partial t}\right),\\ \qquad (x,t)\in Q\cap\{(x,t)\mid\check{u}\neq\tilde{u}\},\end{cases}$$

其中 $D_t(x)$ 表示 $\check{u}(x,t)$ 在点 x 上的所有支撑平面与 $\tilde{u}(x,t)$ 的接触集.

证 当 $\tilde{u}<u$ 时，$\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t}=0$. 当 $\tilde{u}=u$ 时，$\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t_-}=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ $\Bigg($其中 $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial t_-}=\lim\limits_{\Delta t\to+0}\dfrac{\tilde{u}(x,t)-\tilde{u}(x,t-\Delta t)}{\Delta t}\Bigg)$或 $=0$. 因此总有:

$$-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t_-}\leqslant\max\left(0,\ -\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

当 $(x,t)\in Q\cap\{(x,t)\mid\check{u}=\tilde{u}\}$ 时，$\check{u}(x,t)=\tilde{u}(x,t)$, $\check{u}(x,t-\Delta t)\leqslant\tilde{u}(x,t-\Delta t)(\Delta t>0)$. 因此

$$-\frac{\partial\check{u}}{\partial t}\leqslant-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t_-}\leqslant\max\left(0,\ -\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

当 $(x,t)\in\bar{Q}\cap\{\check{u}\neq\tilde{u}\}$ 时，应用引理 17 得: $\exists y^k\in D_t(x)$, $N\leqslant n$, $\lambda_k>0(0\leqslant k\leqslant N)$, $\sum\limits_0^N\lambda_k=1$, $x=\sum\limits_0^N\lambda_k y^k$,

$$\check{u}(x,t)=\sum_0^N\lambda_k\tilde{u}(y^k,t),$$

又

$$\check{u}(x,t-\Delta t)\leqslant\sum\lambda_k\check{u}(y^k,t-\Delta t)\leqslant\sum\lambda_k\tilde{u}(y^k,t-\Delta t),\quad(\Delta t>0),$$

因此

$$0 \leqslant -\frac{\check{u}(x, t)-\check{u}(x, t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\leqslant -\sum_{0}^{N} \lambda_k \frac{\tilde{u}(y^k, t)-\tilde{u}(y^k, t-\Delta t)}{\Delta t},$$

令 $\Delta t \to +0$ 得:

$$0 \leqslant -\frac{\partial \check{u}(x, t)}{\partial t} \leqslant -\sum_{0}^{N} \lambda_k \frac{\partial \tilde{u}(y^k, t)}{\partial t_-}$$

$$\leqslant \sup_{y \in D_t(x)} \max\left(0, -\frac{\partial u(y, t)}{\partial t}\right).$$

引理证毕.

引理 21 设 $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$. 设 $x^0 \in \Omega$, 法线映象 $\nu_{\check{u},t}(x^0)$ 有唯一元素 p^0, 且 p^0 的逆象为唯一. 则

$$\lim_{(y,\tau)\to(x^0,t)} \sup -\frac{\partial \check{u}(y, \tau)}{\partial \tau} \leqslant \max\left\{0, -\frac{\partial u(x^0, t)}{\partial t}\right\}.$$

证 取序列 $(y^k, \tau^k) \to (x^0, t)$. 如果 $(y^k, \tau^k) \in \bar{Q} \cap \{(x, t) | \check{u}=\tilde{u}\}(k=1, 2, \cdots)$, 由引理 20 及 $\partial u/\partial t$ 的连续性得:

$$\lim_{k\to\infty} \sup -\frac{\partial \check{u}(y^k, \tau^k)}{\partial \tau} \leqslant \max\left\{0, -\frac{\partial u(x^0, t)}{\partial t}\right\}.$$

如果 $(y^k, \tau^k) \in \bar{Q} \cap \{(x, t) | \check{u} \neq \tilde{u}\}$, 由引理 20 得:

$$-\frac{\partial \check{u}(y^k, \tau^k)}{\partial \tau} \leqslant \sup_{z \in D_{\tau^k}(y^k)} \max\left\{0, -\frac{\partial u(z, \tau^k)}{\partial \tau}\right\}.$$

设 $p^k \in \nu_{\check{u},\tau^k}(y^k)$, 由 $\check{u}$ 在 Q 中满足一致的 Lip 条件知 $\{p^k\}$ 有界. $\{p^k\}$ 有子列 $p^{k_l} \to p^*$. 由

$$U-\check{u}(y^{k_l}, \tau^{k_l}) \leqslant p^{k_l}(X-y^{k_l}),$$

令 $l \to \infty$ 得:

$$U-\check{u}(x^0, t) \leqslant \sum p^*(X-x^0),$$

因而 $p^* \in \nu_{\check{u},t}(x^0)$. 由定理的假设得 $p^*=p^0$, $\{p^k\}$ 有界而任一收敛子列极限为 p^0. 故必有 $p^k \to p^0 (k \to \infty)$.

再证 x^0 是 $D_{\tau^k}(y^k)$ 当 $\tau^k\to t$ 时的唯一极限点. 如另有极限点 x^*，则有 $z^i\in D_{\tau^{k_i}}(y^{k_i})$ 使 $(z_i,\tau^{k_i})\to(x^*,t)$. 因而于 z^i 与 y^{k_i} 两点，$\check{u}(x,\tau^{k_i})$ 至少有一公共的支撑平面. 即 $\exists p^{k_i}\in\nu_{\check{u}}$, $\tau^{k_i}(z^i)\cap\nu_{\check{u}}$, $\tau^{k_i}(y^{k_i})$. 由引理假设得 $p^{k_i}\to p^0$. 由 $U-\check{u}(z^i,\tau^{k_i})\leqslant p^{k_i}(X-z^i)$ 取极限得:

$$U-\check{u}(x^*,t)\leqslant p^0(X-x^*).$$

即 $p^0\in\nu_{\check{u},t}(x^*)$. x^* 与 x^0 都是 p^0 的逆象而 $x^*\neq x^0$，这与引理的假设矛盾，证毕.

§4 几种情况下的 Александров 型极值原理

定理 22 设 Ω 为有界区域，$\partial\Omega$ 分片属于 C^1. Ω_0 为 Ω 的凸包或包含 Ω 的凸包更大的凸区域. $Q=\Omega_0\times(0,T]$. 设 $u\in C^{2,1}(\bar{Q})$，$u|_{\partial^*Q}\geqslant 0$，$u(x,t)$ 在点 (x^0,T) 达到负最小值，则

$$[-u(x^0,T)]^{n+1}\leqslant\frac{(n+1)R^n}{\kappa_n}\int_{Q_{u,\Omega_0}}-u_t\det(u_{x_ix_j})dx\,dt.$$

其中 R 是 Ω_0 的直径，κ_n 为 n 维单位球体积，Q_{u,Ω_0} 是 u 关于 Ω_0 的负接触集，即

$$Q_{u,\Omega_0}=\{(x,t)\mid Q\cap\{\min{}^{\vee}(0,u)=\min(0,u)\}\}.$$

证 用 $v=\min(0,u)$ 代替 u，则 v 于 $\overline{\{u<0\}}\setminus\{u<0\}$ 处 v 不为 $C^{2,1}$. v 再改记为 u，则有

$$\tilde{u}|_{\partial^*Q}=\check{u}|_{\partial^*Q}=0.$$

先按 $\check{u}=0\ (t<0,\ x\in\bar{\Omega}_0)$，$\check{u}=\check{u}(x,T)(t>T,\ x\in\bar{\Omega}_0)$ 延拓 $\check{u}$ 到 $\Omega_0\times\boldsymbol{R}$. 由于 $\check{u}(x,t)$ 关于 (x,t) 满足 Lip 条件且 $\check{u}|_{\partial\Omega_0\times\boldsymbol{R}}=0$，因此可保持关于 x 为凹，关于 t 为单调不增，关于 (x,t) 为 Lip 连续地延拓 $\check{u}$ 到 $\boldsymbol{R}^{n+1}$，且按我们的延拓方法（见引理 14）可做到于 $\Omega_0\times\boldsymbol{R}$ 之外延拓与 t 无关，且 Lip 系数不超过 cK，其中 c 为仅依赖于 $\partial\Omega_0$ 的常数，K 为 u 于 $\bar{Q}$ 的 Lip 系数.

再作 $\check{u}(x,t)$ 的光滑化. 先作对 t 的光滑化, $\check{u}_\lambda(x,t)$ 为 $\check{u}(x,t)$ 关于变量 t 乘惯常的光滑化核积分而得,则

$$\left|\frac{\partial \check{u}_\lambda(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant cK,$$

且 $\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t} \in C(\boldsymbol{R}^{n+1})$. 由引理 15 作出关于 x 为凹,关于 t 为单调不增的光滑函数列 $\check{u}_{\lambda m}(x,t)$ 及光滑的 $\Omega_m(m=1,2,\cdots)$, 使于 $\partial\Omega_m$ 附近 $\check{u}_{\lambda m}(x,t)$ 与 t 无关, $\partial\Omega_m=\{x \mid \check{u}_{\lambda m}(x,t)=0\}$, 且 $\Omega_m \supset \Omega_{m+1}(m=1,2,\cdots)$, $\bigcap_{m=1}^{\infty}\Omega_m=\Omega_0$, $\check{u}_{\lambda m}(x,t)$ 与 $\frac{\partial \check{u}_{\lambda m}(x,t)}{\partial t}$ 于 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上局部一致地收敛于 $\check{u}_\lambda(x,t)$, $\frac{\partial \check{u}_\lambda(x,t)}{\partial t}$ 且

$$\left|\frac{\partial \check{u}_{\lambda m}(x,t)}{\partial t}\right| \leqslant c^2K,$$

$u_{\lambda m} \in C^{2,1}(\boldsymbol{R}^{n+1})$. 应用定理 1 得到:

$$\begin{aligned}[-u_{\lambda m}(x^0,T)]^{n+1} &\leqslant \frac{(n+1)R_m^n}{K_n}\int_{\Omega_m\times[0,T]} -\frac{\partial \check{u}_{\lambda m}(x,t)}{\partial t} \\ &\cdot \det\left(\frac{\partial^2 \check{u}_{\lambda m}}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)dx\,dt = \frac{(n+1)R_m^n}{K_n}\int_{\Omega_m\times[0,T]} -\frac{\partial \check{u}_{\lambda m}}{\partial t} \\ &\cdot \omega(\check{u}_{\lambda m},dx)\,dt \end{aligned} \tag{19}$$

其中 R_m 为 Ω_m 的直径. 由于

$$\int_{\Omega_m}\frac{\partial \check{u}_{\lambda m}}{\partial t}\,\omega(\check{u}_{\lambda m},dx)=\int_{\Omega_1}\frac{\partial \check{u}_{\lambda m}}{\partial t}\,\omega(\check{u}_{\lambda m},dx),$$

应用引理 11 得:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_1}\left(\frac{\partial \check{u}_{\lambda m}}{\partial t}-\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t}\right)\omega(\check{u}_{\lambda m},dx)\right| &\leqslant \sup_{\Omega_1}\left|\frac{\partial \check{u}_{\lambda m}}{\partial t}-\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t}\right| \\ \cdot\,\omega(\check{u}_{\lambda m},\Omega_1) \leqslant \sup_{\Omega_1}\left|\frac{\partial \check{u}_{\lambda m}}{\partial t}-\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t}\right| &[\omega(\check{u}_\lambda,\Omega_1)+o(1)] \to 0,\end{aligned}$$

当 $m\to\infty$,

应用引理 13 得到,当 $m\to\infty$ 时有:

$$\int_{Q_1}\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t}\,\omega(\check{u}_{\lambda m}, dx)\to\int_{Q_1}\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t}\,\omega(\check{u}_\lambda, dx)$$
$$=\int_{Q_0}\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t}\,\omega(\check{u}_\lambda, dx).$$

故于式 (19) 令 $m\to\infty$ 得:

$$[-u_\lambda(x^0, T)]^{n+1}\leqslant\frac{(n+1)R^n}{\kappa_n}\int_Q-\frac{\partial \check{u}_\lambda(x, t)}{\partial t}\cdot\omega(\check{u}_\lambda, dx)dt. \tag{20}$$

再考察

$$\int_Q-\frac{\partial \check{u}_\lambda(x, t)}{\partial t}\,\omega(\check{u}_\lambda, dx)dt=\int_{Q_0+Q_1+Q_2+Q_3}-\frac{\partial \check{u}_\lambda(x, t)}{\partial t}\cdot\omega(\check{u}_\lambda, dx)\,dt$$

当 $\lambda\to 0$ 时的性质,其中 Q_0 是 $\partial\check{u}/\partial t$ 不存在的点集的小邻域,

$$Q_1=\{(x, t)\,|\,\check{u}<\tilde{u}\}\backslash Q_0,$$
$$Q_2=\{(x, t)\,|\,\check{u}=\tilde{u}<u\}\backslash Q_0,$$
$$Q_3=\{(x, t)\,|\,\check{u}=\tilde{u}=u\}\backslash Q_0.$$

首先按下法定出 Q_0. 固定 $x\in\bar{\Omega}_0$, 当存在 t^0, t^1 使 $\tilde{u}(x, t)=u(x, t^0)$ $(t^0\leqslant t\leqslant t^1)$ 时, t^1 一般是 $\partial\tilde{u}/\partial t$ 不存在的点, 再添加 $u=0$, $\partial u/\partial t$ 不存在的点(因 $\min(0, u)$ 改记为 u, 故有这种点存在). 两种点的总集合记为 δ_x. t^1 是区间 (t^0, t^1) 的右端点, $u=0$, $\partial u/\partial t$ 不存在的点也是某一 $u>0$ 区间的左或右端点,这些区间互不重叠,但区间个数至多为可列,因此 δ_x 为可列点集. $\forall\varepsilon>0$, 用长度为 $\varepsilon/2^k$ 的区间 $\Delta_{x,k}$ 覆盖 δ_x 中第 k 个点,再记

$$\bigcup_{x\in\bar{\Omega}_0}\Delta_{x,k}=Q_0,$$

则有:

$$\int_{Q_0}-\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t}\,\omega(\check{u}_\lambda, dx)dt\leqslant cK\times 2\varepsilon\max_{0\leqslant t\leqslant T}\omega(\check{u}_\lambda, \bar{\Omega}_0)$$
$$=2cK\varepsilon\,[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\omega(\check{u}, \Omega_0)+o(1)],\ \text{当}\ \lambda\ \text{小时}.$$

再考察 Q_2. 在 Q_2 上, $\check{u}(x, t)=u(x, t^1)(t^1<t\leqslant t^2)$. $\check{u}$ 于

(x, t) 处任一支撑平面 $p(X-x)=U-\check{u}(x, t)$ 满足

$$p(X-x) \leqslant \check{u}(X, t)-\check{u}(x, t),$$

当 $\delta<t-t^1$ 时,由 $\check{u}(X, t-\delta) \geqslant \check{u}(X, t)$, $\check{u}(x, t-\delta)=\check{u}(x, t)$ 得:

$$p(X-x) \leqslant \check{u}(X, t-\delta)-\check{u}(x, t-\delta),$$

因此 $p(X-x)=U-\check{u}(x, t)$ 也是 $(x, t-\delta)$ 处 $\check{u}$ 的支撑平面,因而

$$\check{u}(x, t-\delta)=\check{u}(x, t), \quad \frac{\partial \check{u}(x, t)}{\partial t}=0, \quad (t^1<t<t^2),$$

$$\int_{Q_2}-\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t} \omega(\check{u}_\lambda, dx) dt \leqslant [\omega(\check{u}, \Omega_0)+o(1)]$$

$$\cdot \max_{x^* \in \bar{\Omega}} \int_{[0, T] \cap Q_2 \cap\{x=x^*\}}-\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t} dt \rightarrow 0 \text{ (当 } \lambda \rightarrow 0),$$

上式中最后的关系是应用有界收敛定理及 $Q_2 \cap\{x=x^*, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 为可列个区间的和得到.

再考察 Q_1. 于 Q_1 上,由引理 17 得:

$$\check{u}(x, t)=\sum_1^N p_k \tilde{u}(x^k, t), \tag{21}$$

其中 $N \leqslant n+1$, $p_k>0$, $\sum p_k=1$, $\sum p_k x^k=x$, $x^k \in Q_2 \cup Q_3$.

固定 $t^0 \in[0, T]$ 与 $\delta>0$, 记

$$R_{t^0}=\{x \in Q_1(x, t^0) \mid d(x, Q_2(x, t^0)) \geqslant \delta\},$$

则应用引理 11 得到,当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,

$$\int_{R_{t^0}} \omega(\check{u}_\lambda|_{t=t^0}, dx) \leqslant \omega(\check{u}_\lambda|_{t=t^0}, \bar{R}_{t^0})$$

$$\rightarrow \omega(\check{u}|_{t=t^0}, \bar{R}_{t^0})=0,$$

上面最后等式的成立,是因为由式 (21) 得到 $\omega(\check{u}|_{t=t^0}, R_{t^0})=0$, 又于 ∂R_{t^0} 与 Q_3 相交部分,由 $u \in C^{2,1}$ 及 $\check{u}=u$ 得到 $\check{u} \in C^{1,1}$, 因此这部分内法线映象无集中测度.

于 $Q_1^\delta=\bigcup_{t^0 \in[0, T]}\{x \in Q_1(x, t^0) \mid d(x, Q_2(x, t^0))<\delta\}$ 内, 当

$x \to x^0 \in \bar{Q}_1 \cap Q_2$ 时，由 (21) 知有 $N^0 < N$ 使 $x^1, \cdots, x^{N_0} \to x^0$，而 $x^k \to X^k$, $p_k \to 0 (N_0 < k \leqslant N)$。因 $(x^1, t), \cdots, (x^{N_0}, t) \in Q_2$，有 $\dfrac{\partial \tilde{u}(x^k, t)}{\partial t} = 0$，因而

$$-\frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial t} \leqslant -\sum p_k \frac{\partial \tilde{u}(x^k, t)}{\partial t} \to 0, \text{（当 } \delta \to 0\text{）}, \tag{22}$$

$$\int_{Q_1^\delta} -\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t} \omega(\check{u}_\lambda, dx) dt$$

$$\leqslant \omega(\check{u}_\lambda, \Omega) \max_{x^1 \in \bar{\Omega}} \int_{Q_1^\delta \cap \{x = x^1\}} -\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t} dt,$$

先令 $\lambda \to 0$，则

$$\int_{Q_1^\delta \cap \{x = x^1\}} -\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t} dt \to \int_{Q_1^\delta \cap \{x = x^1\}} -\frac{\partial \check{u}}{\partial t} dt$$

对 $x^1 \in \bar{\Omega}$ 一致地成立． 该情况的证明应用 $Q_1^\delta \cap \{x = x^1\}$ 为区间的和集，因此区间个数至多为可列个，记为 (t^i, T^i) $(i = 1, 2, \cdots)$。则当 $\lambda \to 0$ 时，

$$\int_{t^i}^{T^i} \frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t} dt = \check{u}_\lambda(x^1, T^i) - \check{u}_\lambda(x^1, t^i)$$

$$\to \check{u}(x^1, T^i) - \check{u}(x^1, t^i) = \int_{t^i}^{T^i} \frac{\partial \check{u}}{\partial t} dt$$

再用有界收敛即得．再令 $\delta \to 0$，应用 (22) 得：

$$\max_{x^1 \in \bar{\Omega}} \int_{Q_1^\delta \cap \{x = x^1\}} \frac{\partial \check{u}}{\partial t} dt \to 0.$$

再考察 Q_3。于 Q_3 内 $\check{u} \in C^{1,1}$。于

$$Q_3^\delta = \bigcup_{t^0 \in [0, T]} \{x \in Q_3(x, t^0) \mid d(x, Q_2(x, t^0)) < \delta\}$$

内，类似于 Q_1^δ 而更简单地证得，当先令 $\lambda \to 0$，再令 $\delta \to 0$ 时有：

$$\int_{Q_3^\delta} -\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t} \omega(\check{u}_\lambda, dx) dt \to 0.$$

记 $Q_3\backslash Q_3^\delta = Q_4^\delta$，由于在 Q_4^δ 上有$-\partial u/\partial t \geqslant 0$，由引理 21 得：

$$\limsup_{\lambda\to 0}\left(-\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t}\right) \leqslant -\frac{\partial u}{\partial t}, \text{ 当 } (x, t)\in Q_4^\delta\backslash H,$$

其中H为 Q_4^δ 中 $\check{u}$ 的法线映象有重点的点集．又注意到有

$$-\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t} \leqslant cK, \quad \forall (x, t)\in Q.$$

闭集H上非负连续函数 $cK + \partial u/\partial t$ 作延拓成为 $f_1(x, t)\geqslant 0$．记 $f_1(x, t) - \partial u/\partial t = f(x, t)$．则 $\forall \varepsilon > 0$ 有：

$$-\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t} \leqslant f(x, t) + \varepsilon, \quad \forall \lambda < \lambda_0(\varepsilon),$$

因而

$$\int_{Q_4^\delta} -\frac{\partial \check{u}_\lambda}{\partial t}\,\omega(\check{u}_\lambda, dx)\,dt \leqslant \int_{Q_4^\delta} f(x, t)\,\omega(\check{u}_\lambda, dx)\,dt$$

$$+\varepsilon\int_{Q_4^\delta}\omega(\check{u}_\lambda, dx)\,dt \leqslant \int_{Q_4^\delta} f(x, t)\,\omega(\check{u}_\lambda, dx)\,dt + \varepsilon K_1.$$

当 $\lambda\to 0$ 时，应用引理 13 得到，上式右端

$$\leqslant \int_{Q_4^\delta} f(x, t)\,\omega(u, dx)\,dt + \varepsilon K_1$$

$$= \int_{Q_4^\delta} f(x, t)\det(u_{x_ix_j})\,dx\,dt + \varepsilon K_1.$$

于H上，$\det(u_{x_ix_j}) = 0$．故可于上式中先令 $\varepsilon\to 0$ 得：$\varepsilon K_1\to 0$，$f(x, t)\det(u_{x_ix_j}) \to -u_t\det(u_{x_ix_j})$，再令 $\delta\to 0$．

因此于 (20) 中令 $\lambda\to 0$，$\varepsilon\to 0$，$\delta\to 0$ 得：

$$[-u(x^0, T)]^{n+1} \leqslant \frac{(n+1)R^n}{\kappa_n}\int_{Q_3} -u_t\det(u_{x_ix_j})\,dx\,dt.$$

定理证毕．

定理 23 设Ω为有界集，$\partial\Omega$ 为分片属于 C^1，Ω_0为Ω的凸包或包含Ω凸包的凸区域，$Q = \Omega_0\times(0, T]$．设

$$u\in C(\bar{Q})\cap W^{2,1}_{n+1,\mathrm{loc}}(Q), \quad 0\leqslant t^0\leqslant T.$$

则

$$\inf_{Q\cap\{t\le t^0\}} u \geq \inf_{\partial^* Q\cap\{t\le t^0\}} u - \left[\frac{(n+1)R^n}{\kappa_n}\right.$$

$$\left.\cdot \int_q - u_t \det(u_{x_i x_j}) dx\,dt\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

其中 $q = Q_{u-\inf\limits_{\partial^* Q} u;\Omega_0} \cap \{t \leq t^0\}$，$Q_{u-\inf\limits_{\partial^* Q} u;\Omega_0}$ 是 $v = u - \inf\limits_{\partial^* Q} u$ 于 Q 的负接触集，而 R 为 Ω_0 的直径.

证 按

$$u(x,t) = \begin{cases} u(x,0), & t < 0, \\ u(x,T), & t > T \end{cases}$$

延拓 u 到 $\bar{\Omega}_0 \times \boldsymbol{R}$，再作连续延拓到 $\boldsymbol{R}^{n+1}$. 作 u 的光滑化函数列 $\{u_m\}(m = 1, 2, \cdots)$ 逼近. 由光滑化逼近性质得 $\{u_m\}$ 于

$$W^{2,1}_{n+1,\mathrm{loc}}(Q) \cap C(\bar{Q})$$

中收敛于 u.

作 $\Omega_l (l = 1, 2, \cdots)$ 使 Ω_l 为凸，$\partial\Omega_l \in C^\infty$，$\Omega_{l+1} \subset \Omega_l$，

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} \Omega_l = \Omega_0, \quad d(\Omega_l, \partial\Omega) \geq 1/l.$$

Ω_l 的作出可参考引理 14, 15. 记 $Q^l = \Omega_l \times (1/l, T]$，则 $u_m \to u$ 于 $W^{2,1}_{n+1}(Q^l) \cap C(\bar{Q}^l)$. 再记

$$v^l = u - \inf_{Q\setminus Q^l} u, \quad v^l_m = v^l + \|u_m - u\|_{C(Q^l)} + u_m - u.$$

显然有：$v^l_m|_{\partial^* Q^l} \geq 0$. 应用定理 22 得：

$$\inf_{Q^l} v^l_m \geq -\left[\frac{(n+1)R^n}{\kappa_n}\right.$$

$$\left.\cdot \int_{Q_{v^l_m}} - u_{mt} \det(u_{m x_i x_j}) dx\,dt\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

应用引理 16 易证得

$$\lim_{m\to\infty} Q_{v^l_m} = Q_{v^l}.$$

因此 $\forall \varepsilon > 0$，$Q_{v^l_m} \subseteq \{(x,t) \in Q \mid d\{(x,t), Q_{v^l}\} \leq \varepsilon\} \equiv Q^{\varepsilon}_{v^l}$，当 m 大时. 因而

$$\inf_{Q^l} v_m^l \geqslant -\left[\frac{(n+1)R^n}{\kappa_n}\int_{Q_{v^l}^{\varepsilon, l}} -u_{mt}\det(u_{mx_ix_j})dx\,dt\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

先令 $m\to\infty$，再令 $\varepsilon\to 0$ 得：

$$\inf_{Q^l} v^l \geqslant -\left[\frac{(n+1)R^n}{\kappa_n}\int_{Q_{v^l},\Omega_0} -u_t\det(u_{x_ix_j})dx\,dt\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\geqslant -\left[\frac{(n+1)R^n}{\kappa_n}\int_{Q_{v},\Omega_0} -u_t\det(u_{x_ix_j})dx\,dt\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

上面最后一个不等式的成立是由于 $Q_{v^l,\Omega_0}\subseteq Q_{v,\Omega_0}$。令 $l\to\infty$，再 Q 换为 $Q\cap\{t\leqslant t^0\}$，定理得证.

下面进行 Александров 型极值原理的证明，下面几个定理是不同情况下的 Александров 型极值原理.

定理 24 设Ω为有界集，$\partial\Omega$ 分片属于 C^1。Ω_0是Ω的凸包集或包含凸包集的有界凸集，$Q=\Omega_0\times(0,T]$。考察算子

$$\mathscr{L}_0 u=\sum a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}-u_t,\quad (x,t)\in Q,$$

设于Q上 $a_{ij}(x,t)$ 为对称、半正定，$a_{ij}\in L^\infty(Q)$，$1\leqslant i,j\leqslant n$，且 $\det(a_{ij})\geqslant\mu_1>0$。设 $u\in W^{2,1}_{n+1,\mathrm{loc}}(Q)\cap C(\bar{Q})$。则 $\forall 0\leqslant t^0\leqslant T$ 有

$$\inf_{Q\cap\{t\leqslant t^0\}} u(x,t)\geqslant \inf_{\partial^* Q\cap\{t\leqslant t^0\}} u-\left[\frac{R^n}{(n+1)^n\kappa_n}\cdot\int_q\frac{(\mathscr{L}_0u)_+^{n+1}}{\det(a_{ij})}dx\,dt\right]^{n+1}.$$

其中R是Ω_0的直径，又 $q=Q_{u-\inf\limits_{\partial^*Q}u,\Omega_0}\cap\{t\leqslant t^0\}$.

证 由 $a_{ij}\in L^\infty(Q)$，$\det(a_{ij})\geqslant\mu_1$ 及 $u\in W^{2,1}_{n+1,\mathrm{loc}}(Q)$ 得

$$\frac{(\mathscr{L}_0u)_+}{\det^{1/(n+1)}(a_{ij})}\in L^{n+1}_{\mathrm{loc}}(Q).$$

如果

$$\left\|\frac{(\mathscr{L}_0u)_+}{\det^{1/(n+1)}(a_{ij})}\right\|_{L^{n+1}(Q)}=\infty,$$

则定理显然为真．否则设

$$\left\|\frac{(\mathscr{L}_0 u)_+}{\det^{1/(n+1)}(a_{ij})}\right\|_{L^{n+1}(Q)} < \infty.$$

由算术平均数大于或等于几何平均数的关系式知在 $Q_{u-\inf\limits_{\partial^* Q} u, Q_0}$ 上有

$$\mathscr{L}_0 u \geqslant (n+1)[\det(a_{ij})(-u_t)\det(u_{x_i x_j})]^{\frac{1}{n+1}}, \qquad (23)$$

因此于 $Q_{u-\inf\limits_{\partial^* Q} u, Q_0}$ 上有:

$$-u_t \det(u_{x_i x_j}) \leqslant \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \frac{(\mathscr{L}_0 u)_+^{n+1}}{\det(a_{ij})},$$

应用定理 23 就得出本定理.

再考察一般的可测系数线性抛物算子

$$\mathscr{L} u = \sum a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u - u_t.$$

定理 25 除了定理 23 的诸假设外,再设 $b \in L^{n+2+\delta}(Q)(\delta > 0)$, $c \in L^{n+1}(Q)$, $c \leqslant 0$ p.p 于 Q, 且存在正常数N使 $|b| \leqslant -NRc$ p.p 于 Q, 其中 $|b| = (\sum b_i^2)^{1/2}$, 又R为Ω的直径. 则 $u \in W^{2,1}_{n+1,\mathrm{loc}}(Q) \cap C(\bar{Q})$ 满足

$$\inf_{Q\cap\{t\leqslant t^0\}} u(x,t) \geqslant \inf_{\partial^* Q\cap\{t\leqslant t^0\}} u_- - \left[\frac{(N+1)R}{(n+1)\kappa_n^{1/n}}\right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot \left[\iint_q \frac{(\mathscr{L} u)_+^{n+1}}{\det(a_{ij})} dx\,dt\right]^{\frac{1}{n+1}},$$

其中设原点在Ω内, $q = Q_{u-\inf\limits_{\partial^* Q} u_-, B_{(N+1)R}} \cap \{t \leqslant t^0\}$, 又 $B_{(N+1)R}$ 为中心在原点半径为 $(N+1)R$ 的球.

注 记 $v = u - \inf\limits_{\partial^* Q} u_-$, 则 $Q_{v, B_{(N+1)R}}$ 表示在 $B_{(N+1)R} \times [0, T]$ 上 v 的负接触集. 这一函数 $v(v|_{\partial B_{(N+1)R}\times[0,T]} = 0)$ 的负接触集 $\Gamma_{v, B_{(N+1)R}}$ 比 v $(v|_{\partial\Omega_0\times[0,T]} = 0)$ 的负接触集 Γ_v 要小些, 而 Александров 型极值原理右边最后一项的系数大一些. 但当Ω为凸时,两种负接触集总在Q内.

证 由 t 方向异性的嵌入定理得: $u_{x_i} \in L_{\mathrm{loc}}^{(n+1)(n+2)-\delta}(Q)$, 因而 $(\mathscr{L} u)_+ \in L_{\mathrm{loc}}^{n+1}(Q)$. 不失一般性可设

$$\left\|\frac{(\mathscr{L}u)_+}{\det^{1/(n+1)}(a_{ij})}\right\|_{L^{n+1}(Q)}<\infty.$$

应用定理 23 于函数 $v=u-\inf\limits_{\partial^*Q}u_-$ 得:

$$\inf_Q u\geqslant\inf_{\partial^*Q}u_- -\left[\frac{(N+1)^nR^n(n+1)}{\kappa_n}\right.$$

$$\left.\cdot\int_{Q_{v,B_{(N+1)R}}}-u_t\det(u_{x_ix_j})dx\,dt\right]^{\frac{1}{n+1}},\qquad(24)$$

当 $(y,t)\in Q_{v,B_{(N+1)R}}$ 时有:

$$v(y,t)+\nabla u(y,t)(x-y)\leqslant v(x,t)\leqslant 0,\ \forall x\in B_{(N+1)R},$$
$$t\in[0,T],$$

取 $x=y+NR\dfrac{\nabla u(y,t)}{|\nabla u(y,t)|}\in B_{(N+1)R}$，由上式得:

$$u(y,t)+NR|\nabla u(y,t)|\leqslant 0,\quad\forall(y,t)\in Q_{v,B_{(N+1)R}}.$$

因此

$$\sum b_iu_{x_i}+cu\geqslant c(u+NR|\nabla u|)\geqslant 0\quad \text{p.p 于 } Q_{v,B_{(N+1)R}}.$$

应用 (23) 得:

$$(n+1)[\det(a_{ij})(-u_t)\det(u_{x_ix_j})]^{\frac{1}{n+1}}\leqslant\mathscr{L}_0u\leqslant\mathscr{L}u$$

p.p 于 $Q_{v,B_{(N+1)R}}$. 再代入 (24) 得到定理的结果. 证毕.

当有界区域 Ω 非凸时，上面定理不能保证负接触集在 $Q=\Omega\times(0,T]$ 内,不便于应用,因此尚需有下述结果.

定理 26 设 Ω 为任一有界区域，$\partial\Omega$ 为分片 C^1, $Q=\Omega\times(0,T]$，算子

$$\mathscr{L}u=\sum a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}+\sum b_i(x,t)u_{x_i}+c(x,t)u-u_t,$$

其中 $a_{ij}\in L^\infty(Q)$, $b_i\in L^{n+2+\delta}(Q)(\delta>0)$, $c\in L^{n+1}(Q)$,

$$\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2,\ \lambda>0,\ \forall(x,t)\in Q,\ \forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,$$
$$c\leqslant 0,\ |b|\leqslant -NRc\ \text{p.p 于 } Q,$$

其中 N 为正常数. 则 $u\in W^{2,1}_{n+1,\mathrm{loc}}(Q)\cap C(\overline{Q})$ 满足

$$\inf_{Q\cap\{t\leqslant t^0\}} u(x,t) \geqslant \inf_{\partial^* Q\cap\{t\leqslant t^0\}} u_- - \left[\frac{(N+1)R}{(n+1)\kappa_n^{1/n}}\right]^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\cdot\left[\iint_{Q\cap\{t\leqslant t^0\}} \frac{(\mathscr{L}u)_+^{n+1}}{\det(a_{ij})}\,dx\,dt\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

其中R为Q的直径，$0\leqslant t^0\leqslant T$.

证 先就光滑情况证明定理的结论，然后用光滑逼近.

光滑情况的假设是 $\partial Q\in C^{2+\alpha}(0<\alpha<1)$, a_{ij}, b_i, $c\in C^\alpha(\bar{Q})\cap C(\boldsymbol{R}^n)$, $u\in C^{2+\alpha}(\bar{Q})$. 在此诸条件下，求出下面定解问题的解

$$\begin{cases}\mathscr{L}v=(\mathscr{L}u)_+,\\ v|_{\partial^*Q}=\inf\limits_{\partial^*Q}u_-.\end{cases}$$

则由于 $(\mathscr{L}u)_+\in C^\alpha(\bar{Q})$ 得: $v\in C^{2+\alpha}(\bar{Q})$ 为存在唯一.

设原点在Q内. 令w满足

$$\begin{cases}\mathscr{L}w=\begin{cases}(\mathscr{L}u)_+, & (x,t)\in Q,\\ 0, & (x,t)\in Q_R\backslash Q,\end{cases}\\ w|_{\partial^*Q_R}=\inf\limits_{\partial^*Q}u_-,\end{cases}$$

其中 $Q_R=\{(x,t)\,|\,|x|<R,\ 0<t\leqslant T\}$. 易知$w$也是存在唯一的. 由极值原理得到 $w|_{\partial^*Q}\geqslant\inf\limits_{\partial^*Q}u_-$. 再由极值原理及定理23得到，当 $(x,t)\in Q$ 时有:

$$u\geqslant v\geqslant w\geqslant\inf_{\partial^*Q}u_- - \left[\frac{(N+1)R}{(n+1)\kappa_n^{1/n}}\right]^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\cdot\left[\iint_{Q_{w}\cdot B_{(N+1)R}}\frac{(\mathscr{L}u)_+^{n+1}}{\det(a_{ij})}\,dx\,dt\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

光滑情况逼近非光滑情况: Q用 $Q_k=\{x\in Q\,|\,d(x,\partial Q)>1/k\}$ $(k=1,2,\cdots)$ 逼近，再对 ∂Q_k 的边界作光滑化来逼近Q. 系数与u的光滑逼近为先添加定义 $a_{ij}=\lambda^{1/n}\delta_{ij}$, $b_i=c=0$ 于Q外，再作出光滑逼近而证得定理的结论.

对拟线性方程解的 Александров 型极值原理有：

定理 27 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界区域，$\partial\Omega$ 分片属于 C^1，$Q=\Omega\times(0,T]$，$u\in W^{2,1}_{n+1}(Q)$，对称正定矩阵 (a_{ij}) 满足 $\det(a_{ij})\geqslant\mu_1>0$，$\mu_1$ 为常数. $a_{ij}(x,t,u,Du)\in L^\infty(Q)$，$B(x,t,u,Du)\in L^{n+1}(Q)$，其中 $Du=D_x u$.

$$\mathscr{L}u=\sum a_{ij}(x,t,u,Du)u_{x_ix_j}-u_t-B(x,t,u,Du)\leqslant 0,$$

则

$$u(x,t^0)\geqslant\inf_{\partial^*Q\cap(t\leqslant t^0)}u_--\left[\frac{R}{(n+1)K_n^{1/n}}\right]^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\cdot\left[\int_{Q\cap(t\leqslant t^0)}\frac{B_+^{n+1}}{\det(a_{ij})}dx\,dt\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

证 作出 u 的 $W^{2,1}_{n+1}(Q)$ 光滑逼近列 $\{u^k\}$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}u^k&=\sum a_{ij}(x,t,u,Du)u^k_{x_ix_j}-u^k_t\\&\leqslant B(x,t,u,Du)+\sum a_{ij}(x,t,u,Du)\\&\quad\cdot(u^k-u)_{x_ix_j}-(u^k-u)_t,\end{aligned}$$

应用定理 26 (取 $N=0$)，再令 $k\to\infty$，就得出需要的估计式. 定理证毕.

§5 Bony 型极值原理

利用 Александров 型极值原理可导出 Bony 型极值原理. 对椭圆方程的 Bony 极值原理见 [37], [38], [5]. Bony 型极值原理是 Bony 极值原理于抛物情况的推广.

引理 28 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界区域，$Q=\Omega\times(0,T]$. 设 $u\in W^{2,1}_{n+1,\mathrm{loc}}(Q)$ 于 $(x^0,T)\in Q(x^0\in\Omega)$ 达到局部严格最小值. 则 $\forall\delta_0>0$ 与定义于 $(0,\delta_0]$ 的正函数 $\varepsilon(\tau)$，$\varepsilon(\tau)\to0$ (当 $\tau\to0$) 可使 $\forall\delta\in(0,\delta_0]$ 有 $\mathrm{mes}\,A_\delta>0$，其中

$$A_\delta=\{(y,\eta)\in Q_\delta(x^0,T)\cap Q\,|\,u_t(y,\eta)\leqslant0,\quad(u_{x_ix_j})_{(y,\eta)}\geqslant0,$$
$$D_xu\text{ 在 }(y,\eta)\text{ 处存在,且 }|D_xu(y,\eta)\leqslant\varepsilon(\delta)\}.$$

证 由 t 方向异性的嵌入定理得 $u\in C(Q)$. 由于 $u(x, t)$ 在 (x^0, T) 达到局部严格最小,因此存在 $\delta_0>0$ 使

$$\inf_{\partial^* Q_\delta(x^0,T)} u-u(x^0,T)\equiv\frac{1}{2}\varepsilon(\delta)>0,\quad \forall\delta\in(0,\delta_0],$$

其中

$$Q_\delta(x^0,t^0)=\{(x,t)\mid |x-x^0|<\delta,\quad t^0-\delta^2<t\leqslant t^0\}.$$

显然有 $\varepsilon(\delta)\to 0$ (当 $\delta\to 0$). 记

$$v(x,t)=u(x,t)-\inf_{\partial^* Q_\delta(x^0,T)} u,$$

$$\Omega_0=B_{\delta+1}(x^0),\quad Q^\delta=\Omega_0\times(T-\delta^2,T].$$

在 Q^δ 上 $v(x,t)$ 的负接触集 Q_{v,Ω_0} 含有 x^0 附近小邻域部分,在 Q_{v,Ω_0} 上有下列性质:

v 满足一致的 Lip 条件, 因此 $D_x v$ 为 p.p 存在, v 对 t 为单调, 因此 v_t 为 p.p 存在且 $v_t\leqslant 0$, v 的任一方向微商对 x 为单调, 因此 $D_x^2 v$ 为 p.p 存在且 $\sum v_{x_ix_j}\xi_i\xi_j\geqslant 0$, $\forall\xi\in\boldsymbol{R}^n$, 因而 $(v_{x_ix_j})\geqslant 0$ p.p. 又 $\forall(y,t)\in Q_{v,\Omega_0}\subset Q_\delta(x^0,T)$, 由于 $|v(x,t)|$ 有上界 $\varepsilon(\delta)/2$, 类似于引理 3 的推导得:

$$|D_x v(y,t)|=|D_x u(y,t)|\leqslant\frac{\varepsilon(\delta)}{d(y,\partial\Omega_0)}\leqslant\varepsilon(\delta)$$

对 $(y,t)\in Q_{v,\Omega_0}$ 为 p.p 成立. 因此 $\mathrm{mes}\,(Q_{v,\Omega_0}\backslash A_\delta)=0$. 应用定理 22 得

$$0<[\varepsilon(\delta)/2]^{n+1}=[-v(x^0,T)]^{n+1}$$

$$\leqslant\frac{(n+1)R^n}{\kappa_n}\int_{Q_{v,\Omega_0}}-u_t\det(u_{x_ix_j})dx\,dt,$$

因此

$$\mathrm{mes}\,Q_{v,\Omega_0}>0,$$

$$\mathrm{mes}\,(Q_{v,\Omega_0}\cap A_\delta)=\mathrm{mes}\,Q_{v,\Omega_0}-\mathrm{mes}(Q_{v,\Omega_0}\backslash A_\delta)>0,$$

因此

$$\mathrm{mes}\,A_\delta>0.$$

引理得证.

定理 29 （**Bony 型极值原理**） 设 $u\in W^{2,1}_{n+1,loc}(Q)$,

$$\mathscr{L}u=\sum a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}+\sum b_i(x,t)u_{x_i}+c(x,t)u-u_t,$$

a_{ij}, b_i, c 为有界可测,且 $(a_{ij})\geqslant 0$, $c\leqslant 0$. $u(x,t)$ 在 (x^0,t^0) 达到非正最小值,则

$$\lim_{(y,\eta)\to(x^0,t^0)} \operatorname{ess\,inf} \mathscr{L}u\geqslant 0.$$

证 令 $v(x,t)=u(x,t)-[|x-x^0|^4+|t-t^0|^2]$, 则 $v(x,t)$ 在 (x^0,t^0) 达到局部严格最小. 由引理 28 得:

$$\lim_{(y,\eta)\to(x^0,t^0)} \operatorname{ess\,sup}|\nabla u(y,\eta)|=0,$$

$$\lim_{(y,\eta)\to(x^0,t^0)} \operatorname{ess\,inf}\frac{\partial u}{\partial t}(y,\eta)\leqslant 0,$$

$$\lim_{(y,\eta)\to(x^0,t^0)} \operatorname{ess\,inf}\lambda(y,\eta)\geqslant 0,$$

其中 $\lambda(y,\eta)$ 是矩阵 $(u_{x_ix_j}(y,\eta))$ 的最小特征值.

上述三个不等式结合系数条件就得到定理的结论. 证毕.

第八章　密度定理及其应用

拟线性抛物型与拟线性椭圆型方程定解问题的研究，Harnack 不等式与 Hölder 条件估计是基本的.得到这些估计的方法，在散度型头部的方程情况，Ладыженская 估计（包括 de Giorgi 估计），Moser 估计是有效的方法,这两者[49]与本书前面已大致谈过.

对非散度型头部的一般拟线性方程与完全非线性方程（抛物型与椭圆型），有效的方法是具可测系数微分不等式的密度定理.从它出发推导 Harnack 不等式与 Hölder 条件估计是很快的.

研究抛物型方程与椭圆型方程密度定理的文献见[39],[40],[41].

§1　密度定理的叙述

设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界区域，$0<T<T^*<\infty$，$Q=\Omega\times(0,T]$，$Q^*=\Omega\times(0,T^*]$. 考察有界可测系数的线性抛物算子

$$\mathscr{L}u=\sum a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}+\sum b_i(x,t)u_{x_i}+c(x,t)u-u_t.$$

设于 Q^*，$\mathscr{L}$ 的系数满足

$$\lambda|\xi|^2\leqslant\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2,\quad\forall\xi\in R^n,$$

$$0<\lambda\leqslant\Lambda<\infty,\quad(\sum b_i^2)^{1/2}\leqslant\Lambda,\quad|c|\leqslant\Lambda.$$

要证明算子 $\mathscr{L}$ 具有下述性质.

定理 1　设 $u\in W^{2,1}_{n+1}(Q^*)$，$u\geqslant0$，$\mathscr{L}u\leqslant0$ 几乎处处于 Q^*. 设有 $\beta\in(0,1)$ 使

$$|\{(x,t)\in Q|u(x,t)\geqslant1\}|\geqslant\beta|Q|,\tag{1}$$

其中 $|A|$ 表示集合 A 的测度. 对 $\delta > 0$, 记 $\Omega_\delta = \{x \in \Omega | d(x, \partial\Omega) > \delta\}$, 则有

$$\min_{\substack{x \in \Omega_\delta \\ (1-\theta\beta)T \leqslant t \leqslant T^*}} u \geqslant \gamma(>0), \quad (0 < \theta < 1) \tag{2}$$

γ 仅依赖于 β, n, λ, Λ, θ, δ, $\mathrm{diam}\,\Omega$ 的上界, $T/(\mathrm{diam}\Omega)^2$, $T^*/(\mathrm{diam}\Omega)^2$.

注 1 由嵌入定理得 $u \in C(Q^*)$.

注 2 由于

$$\frac{1}{|Q|}|\{(x,t) \in Q | u(x,t) \geqslant 1\}|$$

是集合 $u \geqslant 1$ 于 Q 中的密度,因此定理 1 可称为密度定理.

定理的证明依赖于几个引理. 先对定理的条件与结论作一些分析. 定理的结论可从特殊情况的结论

$$\min_{x \in \Omega_\delta} u(x, T) \geqslant \gamma \tag{3}$$

导出. 这是因为,当 (3) 为真时, $\forall (1-\theta\beta)T \leqslant \tilde{T} \leqslant T^*$ 有:

$$|\{(x,t) \in \Omega \times (0, \tilde{T}] | u(x,t) \geqslant 1\}| \geqslant \min\left(\theta, \frac{T}{T^*}\right)\beta|\Omega|\tilde{T}.$$

用 $\min(\theta, T/T^*)\beta$ 代替 β, 则由 (3) 得到 (2). 因此要证明结论 (3), 假设中所有 Q^* 均可换为 Q.

又定理的密度条件可改为在 Q 中的一个长方柱内成立. 即记

$$k_R(x^0) = \{x | |x_i - x_i^0| < R, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

则 (1) 等价于: 存在一个 $k_R(x^0) \subset \Omega$ 使

$$|\{(x,t) \in K_{R,T} | u(x,t) \geqslant 1\}| \geqslant \beta |K_{R,T}|, \tag{4}$$

其中 $K_{R,T} = k_R(x^0) \times (0, T)$.

这是因为: 当 (4) 成立时, (1) 中 β 用 $\beta\frac{|k_R|}{|\Omega|}$ 代替时成立. 其逆,当 (1) 成立时,作边长为 $\frac{\delta}{2\sqrt{n}}$ 的不重叠正方体族

$$k_\delta^i(1\leqslant i\leqslant N) \text{ 使 } \Omega_{\delta/2}\subset\bigcup_{i=1}^N \bar{k}_\delta^i\subset\Omega,$$

取 δ 充分小使 $|\Omega\backslash\Omega_{\delta/2}|\leqslant\frac{\beta}{2}|\Omega|$. 则至少有一个 $k_\delta^{i_0}$ 使

$$|\{(x,t)\in K_{\delta,T}^{i_0}|u\geqslant 1\}|\geqslant\frac{\beta}{2}|K_{\delta,T}^{i_0}|,$$

即 (4) ($\beta/2$ 代替 β) 成立.

密度定理证明的过程是:于 $K_{R,T}$ 中 $u\geqslant 1$ 的密度 $\geqslant\beta$. 减小 $u\geqslant$ 的数值可增大密度,即 $u\geqslant\alpha(0<\alpha<1)$ 的密度可比 β 大;当 α 相当小时,可做到密度接近于 1. 证明此情况起主要作用的是引理 5. 当密度接近于 1 时,可导出

$$\min_{|x-x^0|\leqslant R/2} u(x,(1-\beta/2)T)\geqslant\gamma_1(>0),$$

证明这点是应用引理 4,由 $u(x,(1-\beta/2)T)\geqslant\gamma_1$, $|x-x^0|\leqslant R/2$ 导出 $\min\limits_{x\in\Omega_\delta}u(x,T)\geqslant\gamma(>0)$, 证明这点是应用引理 2.

在讲诸引理前,不妨设 $x^0=0$, $k_R(0)$ 可简记为 k_R. 并做 t 方向的倍乘变换:用 $\frac{R^2}{T}t$ 代替 t, 相应地系数 a_{ij}, b_i, c 也作倍乘替换. 记 $k_R\times(-R^2,0)=K_R$ 为标准长方体,由此密度定理的假设成为:

$$u\in W_{n+1}^{2,1}(\Omega\times(-R^2,0)),\ u\geqslant 0,\ \mathscr{L}u\leqslant 0 \text{ 几乎处处于}$$
$$\Omega\times(-R^2,0),\ |\{(x,t)\in K_R|u\geqslant 1\}|\geqslant\beta|K_R|. \tag{5}$$

密度定理中,γ 不依赖于 $\operatorname{diam}\Omega$ 而仅依赖于 $\operatorname{diam}\Omega$ 的上界. 这是很重要的,因为要由它导出 Hölder 条件,必须 R 任意小时都能应用. 这一件事的证明是: 当 R_0 时密度定理条件成立. 做坐标变换 $\tilde{x}=\frac{R}{R_0}x$, $\tilde{t}=\frac{R^2}{R_0^2}t$. 算子 $\mathscr{L}u$ 化为

$$\tilde{\mathscr{L}}u=\sum a_{ij}u_{\tilde{x}_i\tilde{x}_j}+\frac{R}{R_0}b_iu_{\tilde{x}_i}+\frac{R^2}{R_0^2}cu-u_{\tilde{t}},$$

由 $(\sum b_i^2)^{1/2}\leqslant\Lambda$, $-\Lambda\leqslant c<0$ 导出

$$\frac{R}{R_0}(\sum b_i^2)^{1/2} \leqslant \Lambda, \quad -\Lambda \leqslant \frac{R^2}{R_0^2} c \leqslant 0, \quad \forall R \leqslant R_0.$$

因此 $\forall R \leqslant R_0$ 时密度定理条件均成立，因而得出 $R \leqslant R_0$ 时密度定理成立.

下面证明密度定理就从条件 (5) 出发.

§2 几个引理与密度定理的证明

引理 2 设 $u \in W^{2,1}_{n+1}$ 且 $u \geqslant 0$, $\mathscr{L} u \leqslant 0$ 几乎处处于

$$\{|x| \leqslant X_2\} \times [T_1, T_2]. \text{ 又} 0 < C^{(1)} \leqslant \frac{T_2 - T_1}{X_2^2 - X_1^2} \leqslant C^{(2)} < \infty,$$

$\inf\limits_{|x|<X_1, t=T} u \geqslant 1$，则有

$$\inf_{|x|<X_2/2, t=T_2} u \geqslant C_1 \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{C_2},$$

正常数 C_1, C_2 仅依赖于 n, λ, Λ, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ 及 X_1 的上界 D.

证 由于 $\mathscr{L} u - \Lambda u \leqslant \mathscr{L} u \leqslant 0$，因此不失一般性可设

$$-\Lambda \leqslant c \leqslant 0. \text{ 记 } \frac{T_2 - T_1}{X_2^2 - X_1^2} = L, \quad t - T_1 + LX_1^2 = \tau,$$

则 $t = T_1$, $t = T_2$ 分别对应于 $\tau = LX_1^2$, $\tau = LX_2^2$. 考察函数

$$v(x, \tau) = \left(1 - \frac{L|x|^2}{\tau}\right)^m \tau^{-M},$$

其中 m, M 为正常数且 $m \geqslant 1$. 则有:

$$\tau^{M+1}\left(1 - \frac{L|x|^2}{\tau}\right)^{2-m} \mathscr{L} v = -2Lm\sum(a_{ii} + b_i x_i)$$

$$\cdot \left(1 - \frac{L|x|^2}{\tau}\right) + 4m(m-1)\frac{L^2\sum a_{ij}x_i x_j}{\tau}$$

$$+ (M + C\tau)\left(1 - \frac{L|x|^2}{\tau}\right)^2 - Lm\frac{|x|^2}{\tau}\left(1 - L\frac{|x|^2}{\tau}\right),$$

记 $\sigma = \frac{L|x|^2}{\tau}$, $C = 2n\Lambda(1 + D)$, 当 $M \geqslant 4C^{(2)}D^2\Lambda$ 时，上式右

端

$$\geqslant -LmC(1-\sigma)+4Lm(m-1)\lambda\sigma+(M-C^{(2)}D^2\Lambda)$$
$$\cdot(1-\sigma)^2-m\sigma(1-\sigma)$$
$$\geqslant 2Lm(m-1)\lambda\sigma-LmC(1-\sigma)+\frac{M}{4}(1-\sigma)^2$$
$$+\frac{1}{2}[4Lm(m-1)\lambda\sigma^2+M(1-\sigma)^2-2m\sigma(1-\sigma)]$$
$$\geqslant\begin{cases}Lm[(m-1)\lambda-C], & \frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 1,\\ \frac{M}{16}-LmC, & 0\leqslant\sigma<\frac{1}{2},\end{cases}$$

当 $LM\geqslant\frac{1}{4\lambda}\left(1-\frac{1}{m}\right)$ 时成立。取 m 与 M 使 $m\geqslant 1+\frac{C}{\lambda}$, $M\geqslant \max\left\{16C^{(2)}mC,\ \frac{1}{4\lambda C^{(1)}}\left(1-\frac{1}{m}\right),\ 4C^{(2)}D^2\Lambda\right\}$，则有:

$$\mathscr{L}v\geqslant 0.$$

应用 Александров 型极值原理(注意 Александров 型极值原理中条件 $(\sum b_i^2)^{1/2}\leqslant -N_1c$ 不能满足，可先在方程两端添加 εu，应用 Александров 型极值原理后再令 $\varepsilon\to 0$) 于区域

$$(x,\tau)\in\{|x|<X_2\}\times(LX_1^2,LX_2^2),$$

于函数

$$w=\begin{cases}u-(LX_1^2)^M v, & \frac{L|x|^2}{\tau}<1,\\ u, & \frac{L|x|^2}{\tau}\geqslant 1,\end{cases}$$

得到，于上述区域内，$w\geqslant 0$. 因此有:

$$u|_{\tau=LX_2^2,|x|\leqslant X_2/2}\geqslant\left(1-\frac{1}{4}\right)^m\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{2M}\geqslant C_1\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{C_2}.$$

引理得证。

引理 2′ 设 $u\in W^{2,1}_{n+1}$, $u\geqslant 0$, $\mathscr{L}u\leqslant 0$ 几乎处处于

$$\{x|d(x,\overline{x^1x^2})<X_2\}\times[T_1,T_2],$$

又

$$\inf_{|x-x^1|\leqslant X_1, t=T_1} u \geqslant 1, \quad |x^2 - x^1| \leqslant k(X_2 - X_1),$$

$$0 < C^{(1)} \leqslant \frac{T_2 - T_1}{X_2^2 - X_1^2} \leqslant C^{(2)} < \infty.$$

则有

$$\inf_{\substack{|x-x^2|\leqslant X_2/2 \\ t=T_2}} u \geqslant C_1 \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{C_2},$$

其中 C_1 与 C_2 仅依赖于 n，λ，Λ，$C^{(1)}$，$C^{(2)}$，D，k.

证明类似于引理 2，仅是 v 改为

$$v(x,\tau) = \left[1 - \frac{L}{\tau}\left| x - x^2 + \frac{x^2 - x^1}{T_2 - T_1}(LX_2^2 - \tau)\right|^2\right]^m \tau^{-M},$$

取 m，M 使 $m \geqslant 1 + \frac{1}{\lambda}\left[C + \frac{k}{C^{(1)}}\right]$，$M \geqslant \max\left\{16C^{(2)}m\left[C + \frac{k}{C^{(1)}}\right], \frac{1}{4\lambda C^{(1)}}\left(1 - \frac{1}{m}\right), 4C^{(2)}D^2\Lambda\right\}$即可.

以下均记 $K_R(x^0, t^0) = k_R(x^0) \times [t^0 - R^2, t^0]$，$K_R = K_R(0, 0)$.

引理 3 设 $u \in W^{2,1}_{n+1}(K_{1+\theta})$满足 $u \geqslant 0$，$\mathscr{L}u \leqslant 0$ 几乎处处于 $K_{1+\theta}$，$(0 < \theta < 1)$，其中 $0 \leqslant c \leqslant \Lambda$. 则存在常数 μ 满足 $0 < \mu < 1$，使当 $K_R(x^1, t^1) \subset K_1$，$|K_R(x^1, t^1) \cap \{u \geqslant 1\}| \geqslant \mu |K_R(x^1, t^1)|$ 时，有:

$$u \geqslant C \quad 于 \quad \{k_{3R}(x^1) \times [t^1, t^1 + 7R^2]\} \cap K_1,$$

C 仅依赖于 n，λ，Λ，μ，θ.

证 令 $x - x^1 = RX$，$t - t^1 = R^2 T$，设 $\mathscr{L}$ 化为 $\tilde{\mathscr{L}}$，令

$$v = \begin{cases} u - [1 - e^{L(|X|^2 - 2T)}]^2, & |X|^2 < 2T, \\ u, & |X|^2 \geqslant 2T, \end{cases}$$

常数 $L \geqslant 1$，L 待定. 则于抛物边界

$$\Gamma = \left\{|X| = 1, 0 \leqslant T \leqslant \frac{1}{2}\right\} \cup \{T = 0, |X| \leqslant 1\} \text{ 上},$$

$$v > 0,$$

又

$$(\tilde{\mathscr{L}} - cR^2)v \leqslant [8L^2\sum a_{ij}X_iX_j + 4L\sum a_{ii} + b_iRX_iL + 4L]e^{L(|X|^2-2T)} - [16L^2\sum a_{ij}X_iX_j + 8L\sum(a_{ii} + b_iRX_i) + 4L]e^{2L(|X|^2-2T)} \leqslant C_1L^2e^{L(|X|^2-2T)} \leqslant C_1L^2[2e^{L(|X|^2-2T)} - e^{2L(|X|^2-2T)}] = C_1L^2(v + 1 - u).$$

上式当 $L \geqslant 1$, $|X|^2 < 2T$ 时成立. 因此有

$$\tilde{\mathscr{L}}v - (cR^2 + C_1L^2)v \leqslant \begin{cases} C_1L^2(1-u)_+, & |X|^2 < 2T, \\ 0, & |X|^2 \geqslant 2T. \end{cases}$$

应用 Александров 型极值原理得(记 $B_r = \{x \mid |x| < r\}$):

$$v \geqslant v_-|_\Gamma - C_2\left\{\frac{1}{2|B_1|} \cdot \int_{B_1\times[0,1/2]} [\tilde{\mathscr{L}}v - (R^2c + C_1L^2)v]_+^{n+1}dXdT\right\}^{1/(n+1)}$$

$$\geqslant -C_2C_1L^2\left[\frac{1}{2|B_1|}\int_{B_1\times[0,1/2]}(1-u)_+^{n+1}dXdT\right]^{1/(n+1)}$$

$$\geqslant -C_3L^2\left|B_1\times\left[0, \frac{1}{2}\right]\cup\{u\leqslant 1\}\right| \geqslant -C_3L^2 \times |\{k_1\times(0,1)\}\cap\{u\leqslant 1\}| \geqslant -C_4L^2(1-\mu).$$

因此

$$u|_{B_{1/2}\times\{T=1/2\}} \geqslant (1-e^{-3L/4})^2 - C_4L^2(1-\mu)$$

$$\geqslant 1 - \frac{1}{9L^2/64} - C_4L^2(1-\mu)$$

$$= 1 - \frac{16}{3}[C_4(1-\mu)]^{1/2},$$

当取 $\frac{9C_4}{64}L^4(1-\mu) = 1$ 时上式成立.

取 $\mu \geqslant 1 - \frac{1}{1024C_4}$, 则在 (X, T) 坐标下有:

$$u|_{B_{1/2}\times\{T=1/2\}} \geqslant \frac{1}{2},$$

在 (x, t) 坐标下，上式是

$$u|_{B_{R/2}(x^1)\times\{t=t^1-R^2/2\}} \geqslant \frac{1}{2}.$$

再取 x^2 为 $k_{3R}(x^1) \cap k_1$ 内任一点，$X_1 = \theta R/2$，$X_2 = \theta R$，$T_1 = t^1 - R^2/2$，$t^1 \leqslant T_2 \leqslant \min\ (0, t^1 + 7R^2)$ 应用引理 2′ 得证本引理.

类似于引理 3 的证明，可得:

引理 4 $u \in W^{2,1}_{n+1}(K_1)$，满足 $u \geqslant 0$，$\mathscr{L} u \leqslant 0$ 几乎处处于 K_1，其中 $0 \leqslant c \leqslant \Lambda$. 则存在 μ 满足 $0 < \mu < 1$，使当

$$|K_1 \cap \{u \geqslant 1\}| \geqslant \mu |K_1|$$

时，

$$u|_{B_{1/2}\times\{t=0\}} \geqslant 1 - C(1-\mu)^{1/2},$$

C 仅依赖于 n, λ, Λ.

引理 5 设有可测集 $\Gamma \subset K_1$，$|\Gamma| > 0$. 可测集 $\tilde{\Gamma}$ 满足

$$\tilde{\Gamma} \supseteq \Gamma \cup \{k_{3R}(x^0) \times [t^0, t^0 + 7R^2) \cap K_1 | K_R(x^0, t^0) \subset K_1, \\ |\Gamma \cap K_R(x^0, t^0)| \geqslant \mu |K_R(x^0, t^0)|\} \tag{6}$$

则或者有

$$|\tilde{\Gamma}| \geqslant \left(1 + \frac{1-\mu}{12}\right) |\Gamma|,$$

或者存在一个 $K_R(x^0, 0) \subset K_1$ 使

$$R \geqslant \frac{1}{4} |\Gamma|^{1/2}, \quad |\Gamma \cap K_R(x^0, 0)| \geqslant \mu |K_R(x^0, 0)|. \tag{7}$$

证 如果 $|\Gamma \cap K_1| \geqslant \mu |K_1|$，则 (7) 成立. 否则 $|\Gamma \cap K_1| < \mu |K_1|$. K_1 分为 2^{n+2} 个等长方体 $K_{1/2}(y_i, \tau_i)$，

$$y_i = \pm \frac{1}{2} \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

$\tau_i = -3/4, -1/2, -1/4, 0$. 诸 $K_{1/2}$ 中满足 $|\Gamma \cap K_{1/2}| < \mu |K_{1/2}|$ 的长方体再分为 2^{n+2} 个等长方体 $K_{1/4}(\cdots)$, …….

首先讨论最大的长方体 $K^0_{2^{-k}}$ 之一使 $|\Gamma \cap K^0_{2^{-k}}| \geqslant \mu |K^0_{2^{-k}}|$ (即 k 为使此式成立的最小的 k). 含有 $K^0_{2^{-k}}$ 未分前的长方体设

为 $\widetilde{K}^{0}_{2^{-k+1}}$. 在 t 方向具有同一性质相连长方体设为 $\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1}}$ ($l=0,1,\cdots,L$), 即 $l=-1$, $L+1$ 不具有同一性质. 也就是说, $|\Gamma\cap\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1}}|<\mu|\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1}}|$, 又至少有一个 $K^{0,l}_{2^{-k}}\subset\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1}}$ 使

$$|\Gamma\cap K^{0,l}_{2^{-k}}|\geqslant\mu|K^{0,l}_{2^{-k}}|\quad(l=0,1,\cdots,L),$$

而 $\forall j$ 使 $1\leqslant j\leqslant 2^{n+2}$, $K^{j}_{2^{-k}}\subset\widetilde{K}^{-1}_{2^{-k+1}}\cup K^{L+1}_{2^{-k+1}}$ 均有 $|\Gamma\cap K^{j}_{2^{-k}}|<\mu|K^{j}_{2^{-k}}|$. 记 $\widetilde{K}^{-1}_{2^{-k+1}}$ 的上层小长方体为 $K^{-1,j}_{2^{-k}}$($1\leqslant j\leqslant 2^{n}$), 记 $\widetilde{K}^{L+1}_{2^{-k+1}}$ 的下层小长方体为 $K^{L+1,j}_{2^{-k}}$($1\leqslant j\leqslant 2^{n}$). 由 $|\Gamma\cap K^{0,l}_{2^{-k}}|\geqslant\mu|K^{0,l}_{2^{-k}}|$ ($0\leqslant l\leqslant L$) 得 $\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1}}\subset\tilde{\Gamma}$ ($1\leqslant l\leqslant L$), $K^{L+1,j}_{2^{-k}}\subset\tilde{\Gamma}$ ($1\leqslant j\leqslant 2^{n}$). 因此

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{\Gamma}\cap\left(\sum_{l=0}^{L}K^{l}_{2^{-k+1}}+\sum_{j=1}^{2^{n}}K^{L+1,j}_{2^{-k}}\right)\right|-\frac{1-\mu}{4}\left|\sum_{j=1}^{2^{n}}K^{-1,j}_{2^{-k}}\right|\\
\geqslant&\left|\Gamma\cap\left(\sum_{l=0}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1}}+\sum_{j=1}^{2^{n}}K^{L+1,j}_{2^{-k}}\right)\right|+(1-\mu)\cdot\\
&\left|\sum_{l=1}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1}}+\sum_{j=1}^{2^{n}}K^{L+1,j}_{2^{-k}}\right|-\frac{1-\mu}{4}\left|\sum_{j=1}^{2^{n}}K^{-1,j}_{2^{-k}}\right|\\
\geqslant&\left[1+\frac{3/16+L}{5/4+L}(1-\mu)\right]\left|\Gamma\cap\left(\sum_{l=0}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1}}\right.\right.\\
&\left.\left.+\sum_{j=1}^{2^{n}}K^{L+1,j}_{2^{-k}}\right)\right|,
\end{aligned}\tag{8}$$

$K^{-1,j}_{2^{-k}}$ 如在 K_1 之外(即在 $t=-1$ 下面), 则上式中与它有关的项不要. $K^{L+1,j}_{2^{-k}}$ 如在 K_1 之外(即在 $t=0$ 上面), 这时上式修改为

$$\begin{aligned}
&(1-\mu)\left|\sum_{j=1}^{2^{n}}K^{L+1,j}_{2^{-k}}\right|+\left|\tilde{\Gamma}\cap\sum_{l=0}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1}}\right|-\frac{1-\mu}{4}\left|\sum_{j=1}^{2^{n}}K^{-1,j}_{2^{-k}}\right|\\
&\geqslant\left[1+\frac{3/16+L}{1+L}(1-\mu)\right]\left|\Gamma\cap\sum_{l=0}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1}}\right|
\end{aligned}\tag{9}$$

K_1 的剩下部分中再考察 $|\Gamma\cap K_{2^{-k}}|\geqslant\mu|L_{2^{-k}}|$ 的长方体, 按 k 由小到大继续进行讨论, 一般地仍得到 (2) 式. $K^{-1,j}_{2^{-k}}$ 如在 K_1 之外, 或小的 k 时已处理过了, 则这项于 (8) 中不计入. $K^{L+1,j}_{2^{-k}}$ 如在 K_1 之外或小的 k 时已处理过了, 则式 (8) 换为式 (9).

式 (8) 与 (9) 对所有可能的长方体相加．由于

$$\frac{1-\mu}{4}\left|\sum_{j=1}^{2^n} K_{2^{-k}}^{-1,j}\right| \geqslant (1-\mu)\left|\sum_{j=1}^{2^n} K_{2^{-k_1}}^{L+1,j}\right|$$

当 $k_1 > k$ 时成立．因此总的结果为:

$$(1-\mu)|\Gamma| + |\tilde{\Gamma}| \geqslant \left[1+\frac{3}{20}(1-\mu)\right]\left|\Gamma \cap \sum_k \widetilde{K}_{2^{-k+1}}\right|,$$

其中 Γ 为所有在 $t=0$ 之上的长方体之和．

由于 Γ 为可测集，有

$$\frac{|\Gamma \cap K_R(y,\tau)|}{|K_R(y,\tau)|} \to 1 > \mu, \quad 当 R \to 0,$$

对 $(y,\tau) \in \Gamma$ 几乎处处成立．因此

$$\left|\Gamma \Big\backslash \sum_k \widetilde{K}_{2^{-k+1}}\right| = 0,$$

即

$$\left|\Gamma \cap \sum_k \widetilde{K}_{2^{-k+1}}\right| = |\Gamma|,$$

因而有

$$(1-\mu)|\Gamma| + |\tilde{\Gamma}| \geqslant \left[1+\frac{3}{20}(1-\mu)\right]|\Gamma|.$$

当 Γ 的最大高度超过 $|\Gamma|/16$ 时，K_1 中至少有一长方体其顶面为 $t=0$，密度 $\geqslant \mu$，宽度 $\geqslant |\Gamma|^{1/2}/4$，即 (7) 为真．否则

$$\begin{aligned}|\tilde{\Gamma}| &\geqslant \left[1+\frac{3}{20}(1-\mu)-\frac{1}{16}(1-\mu)\right]|\Gamma| \\ &> \left(1+\frac{1-\mu}{12}\right)|\Gamma|.\end{aligned}$$

引理证毕．

现在可以证明密度定理(定理 1) 了．

证 在定理 1 的假设 (5) 中，不失一般性可令 $R = 1+\theta$，其中 $\theta = \theta(n,\beta)$ 由 $|K_{1+\theta}| = \left(1+\frac{\beta}{2}\right)|K_1|$ 定出．因而 $u \geqslant 0$，$\mathscr{L}u \leqslant 0$ 几乎处处于 $K_{1+\theta}$，又

$$|\{(x,t)\in K_1(0,-2\theta-\theta^2)|u(x,t)\geqslant 1\}|$$
$$\geqslant \beta|K_{1+\theta}|-\frac{\beta}{2}|K_1|\geqslant\frac{\beta}{2}|K_1|.$$

又不失一般性可设 $0\leqslant c\leqslant \Lambda$，否则做变换 $u=e^{-\Lambda t}v$ 即可.

取 $\Gamma=K_1(0,-2\theta-\theta^2)\cap\{u\geqslant 1\}$，$\tilde{\Gamma}=K_1(0,-2\theta-\theta^2)\cap\{u\geqslant C\}$，其中 C 是引理 3 中的常数. 则应用引理 3 知 Γ 与 $\tilde{\Gamma}$ 满足引理 5 的条件式子 (6). 应用引理 5 知,或者是前一情况

$$|\tilde{\Gamma}|\geqslant\left(1+\frac{1-\mu}{12}\right)|\Gamma|\geqslant\frac{\beta}{2}\left(1+\frac{1-\mu}{12}\right)|K_1|;$$

或者是后一情况: 存在 $K_R(x^0,0)$ 满足 (7). 对前一情况再取

$$\Gamma=K_1(0,-2\theta-\theta^2)\cap\{u\geqslant C\},$$
$$\tilde{\Gamma}=K_1(0,-2\theta-\theta^2)\cap\{u\geqslant C^2\},\cdots\cdots.$$

一般地,当后一情况未发生时,取

$$\Gamma=K_1(0,-2\theta-\theta^2)\cap\{u\geqslant C^{k-1}\},$$
$$\tilde{\Gamma}=K_1(0,-2\theta-\theta^2)\cap\{u\geqslant C^k\},\ k=1,2,\cdots,$$

由此导出

$$|\tilde{\Gamma}|\geqslant\frac{\beta}{2}\left(1+\frac{1-\mu}{12}\right)^k|K_1|,$$

因而

$$k\leqslant\log\frac{2\mu}{\beta}\Big/\log\left(1+\frac{1-\mu}{12}\right)$$

时总会出现第二情况,即存在 k_0 满足

$$1\leqslant k_0\leqslant\log\frac{2\mu}{\beta}\Big/\log\left(1+\frac{1-\mu}{12}\right)\text{ 及 }K_R(x^0,0)\subset K_1,$$

使

$$R\geqslant\frac{1}{4}|K_1(0,-2\theta-\theta^2)\cap\{u\geqslant C^{k_0-1}\}|^{1/2}\geqslant\frac{1}{4}\left(\frac{\beta}{2}|K_1|\right)^{1/2},$$

$$\mu|K_R(x^0,0)|\leqslant|K_R(x^0,0)\cap\{u\geqslant C^{k_0-1}\}|$$
$$\leqslant|K_R(x^0,0)\cap\{u\geqslant C_1\}|.$$

其中 $C_1=\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^{\log\frac{1}{C}/\log\left(1+\frac{1-\mu}{12}\right)}$.

应用引理 4 得，于 $k_{R/2}(x^0)\times\left\{t=-\theta-\frac{\theta^2}{2}\right\}$ 上，$u\geqslant C$. 再于引理 2′ 中取 $T_1=-\theta-\theta^2/2$, $T_2=0$,

$$X_2=\min\left\{\frac{1}{16}\beta^{1/2},\ \frac{\delta}{2}\right\},\ X_1=X_2/2,\ x^1=x^0,$$

x^2 为 Ω_δ 中的任一点，应用引理 2′ 得:

$$\inf_{\substack{x\in\Omega_\delta\\ t=0}} u\geqslant\gamma^{(*)}.$$

定理 1 证毕.

§3 可测系数线性抛物方程解的 Harnack 不等式

密度定理有若干应用，分述如下.

定理 6 设 Ω 为 R^n 中的有界区域，$Q=\Omega\times(0,T]$. 于 Q 中，可测系数算子

$$\mathscr{L}=\sum a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x,t)-\frac{\partial}{\partial t}$$

满足

$$\lambda|\xi|^2\leqslant\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2,\quad\forall\xi\in R^n,\quad 0<\lambda\leqslant\Lambda<\infty,$$
$$\left(\sum b_i^2\right)\leqslant\Lambda,\quad|c|\leqslant\Lambda,\quad\forall(x,t)\in Q.$$

(*) Ω 非凸时，引理 2′ 的条件可能不满足，证明要稍作修改. 由 $(x^0,-2\theta-\theta^2)$ 到 $(x^2,0)$ 于 $\Omega_\delta\times(-2\theta-\theta^2,0)$ 内总可引 t 为增加的一条曲线，此曲线于 $-\frac{1}{2}(k+1)\delta\leqslant t\leqslant-\frac{1}{2}k\delta\left(0\leqslant k\leqslant\frac{2}{\delta}(2\theta+\theta^2)\right)$ 内改为折线段，对每折线段应用引理 2′.

设 $u\in W^{2,1}_{n+1}(Q)$ 且 $u\geqslant 0$，$\mathscr{L}u=0$ 几乎处处于 Q. 则当

$$(x^1,t^1),\ (x^2,t^2)\in Q_\delta=\Omega_\delta\times[\delta,T],$$

$$\Omega_\delta=\{x\mid d(x,\partial\Omega)>\delta\},\ \text{且}\ T\geqslant t^2\geqslant t^1+\eta(\eta>0)$$

时有:

$$u(x^2,t^2)\geqslant Cu(x^1,t^1),$$

C 为仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\delta,\eta$ 与 diam Q 的正常数.

证 仅考察区域 $\Omega\times[t^1-\delta,T]$ 部分. 不失一般性可令 $x^1=0$，$t^1=0$，$\delta=2$. 因而 $K_1\subset Q$.

如果 $u(0,0)=0$，则定理显然成立，故可设 $u(0,0)>0$. 正常数 m 将于下面取定. 函数

$$g(R)=u(0,0)(1-R)^{-m}-2\max_{K_R(0,0)}u=0$$

于 $0\leqslant R\leqslant 1$ 的最大根记为 K_0. 由于 $g(0)\leqslant 0$，$g(1-0)=+\infty$，故最大根 R_0 唯一地定出，且 $0<R_0<1$. 记 $\max\limits_{K_{R_0}(0,0)}u=u(x^0,t^0)$. 由于 $K_{(1-R_0)/2}(x^0,t^0)\subset K_{(1+R_0)/2}(0,0)$，故有:

$$\sup_{K_{(1-R_0)/2}(x^0,t^0)}u\leqslant\frac{1}{2}u(0,0)\left(1-\frac{1+R_0}{2}\right)^{-m}$$

$$=2^{m-1}u(x^0,t^0).$$

如果又有:

$$\left|K_{(1-R_0)/2}(x^0,t^0)\cap\left\{\frac{2^{m-1}u(x^0,t^0)-u}{(2^{m-1}-1/2)u(x^0,t^0)}\geqslant 1\right\}\right|$$

$$\geqslant\mu|K_{(1-R_0)/2}|,$$

则应用引理 4 得:

$$\left.\frac{2^{m-1}u(x^0,t^0)-u}{(2^{m-1}-1/2)u(x^0,t^0)}\right|_{B_{(1-R_0)/4}\times\{t=t^0\}}\geqslant 1-C(1-\mu)^{1/2},$$

以 $(x,t)=(x^0,t^0)$ 代入得:

$$\frac{2^{m-1}-1}{2^{m-1}-1/2}\geqslant 1-C(1-\mu)^{1/2},$$

μ 近于 1 时得到矛盾. 因此存在 $\mu_0\in(0,1)$ 使

$$\left| K_{(1-R_0)/2}(x^0, t^0) \cap \left\{ \frac{2^{m-1}u(x^0, t^0) - u}{(2^{m-1} - 1/2)u(x^0, t^0)} \geqslant 1 \right\} \right|$$
$$< \mu_0 |K_{(1-R_0)/2}|,$$

即

$$\left| K_{(1-R_0)/2}(x^0, t^0) \cap \left\{ \frac{u(x, t)}{u(x^0, t^0)} \leqslant \frac{1}{2} \right\} \right| < \mu_0 |K_{(1-R_0)/2}|,$$

$$\left| K_{(1-R_0)/2}(x^0, t^0) \cap \left\{ \frac{2u(x, t)}{u(x^0, t^0)} > 1 \right\} \right| \geqslant (1 - \mu_0) |K_{(1-R_0)/2}|.$$

由此应用密度定理 1 得:

$$\left. \frac{2u(x, t)}{u(x^0, t^0)} \right|_{B_{(1-R_0)/4}(x^0) \times \{t=t^0\}} \geqslant \gamma > 0.$$

当 Ω 为凸集时，$\{x | d(x, \overline{Ox^2}) \leqslant 1\} \subset \Omega$. 应用引理 2′: $x^1 = x^0$, $T_1 = t^0$, $X_1 = (1 - R_0)/4$, $x^2 = x^2$, $T_2 = t^2$, $X_2 = 1$, $k = (4/3)$ diam Ω 得:

$$u(x^2, t^2) \geqslant C \left(\frac{1 - R_0}{4} \right)^{C_2} \inf_{B_{(1-R_0)/4}(x^0) \times \{t=t^0\}} u$$
$$\geqslant \frac{C\gamma}{2} u(x^0, t^0) \left(\frac{1 - R_0}{4} \right)^{C_2} = \frac{C\gamma}{4^{C_2+1}} u(0, 0)(1 - R_0)^{C_2 - m},$$

其中 C 与 C_2 均依赖于 η. 预先取定 $m = C_2$，则有:

$$u(x^2, t^2) \geqslant \frac{C\gamma}{4^{C_2+1}} u(0, 0),$$

Harnack 不等式已得出，Ω 非凸时，证明要稍作修改，参见定理 1 证明中的页末注。

§4 拟线性抛物方程解的 Hölder 条件估计

由密度定理可推导解满足 Hölder 条件. 不仅是解满足具可测系数线性抛物方程，且解满足具自然结构条件的拟线性抛物方程亦可。

定理 7 Ω为$\boldsymbol{R}^n$中的有界区域，$Q=\Omega\times(0,T]$，$u\in W^{2,1}_{n+1}(Q)$几乎处处满足可测系数方程

$$\sum a_{ij}(x,t,u,Du)u_{x_ix_j}+b(x,t,u,Du)-u_t=0,$$

其中 $Du=(u_{x_1},\cdots,u_{x_n})$，

$$|b(x,t,z,p)|\leqslant b_0|p|^2+b_1(x,t)|p|+b_2(x,t)|z|+g(x,t),$$

$$\lambda|\xi|^2\leqslant\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2,\quad\forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,\quad 0<\lambda\leqslant\Lambda<\infty,$$

b_0为常数，$b_1\in L^{2(n+1)}(Q)$，b_2，$g\in L^{n+1}(Q)$.

则当u于Q为有界$|u|\leqslant M$时，于Q的抛物内闭区域中有：

$$|u(x^2,t^2)-u(x^1,t^1)|\leqslant C(|x^2-x^1|^2+|t^2-t^1|)^{\alpha/2},$$

C，α仅与n，λ，Λ，$\operatorname{diam}Q$，M，b_0，$\|b_1\|_{L^{2(n+1)}(Q)}$，$\|b_2\|_{L^{n+1}(Q)}$，$\|g\|_{L^{n+1}(Q)}$及抛物内闭区域与∂^*Q（∂^*Q是Q的抛物边界）的距离有关.

对于线性方程，M可用其它已知量估计，因而这情况下Hölder指数、系数均与M无关.

证 于Q的抛物内闭区域中任意取定一点(x^0,t^0).作$K_R(x^0,t^0)\subset Q$与$K_{R/2}(x^0,t^0)$. 记

$$\max_{K_{R/2}(x^0,t^0)}u=u_1=u(x^1,t^1),$$

$$\min_{K_{R/2}(x^0,t^0)}u=u_2=u(x^2,t^2),\quad\frac{u_1+u_2}{2}=u_0.$$

不失一般性可设

$$|\{(x,t)\in K_R(x^0,t^0)\,|\,u\leqslant u_0\}|\geqslant\frac{1}{2}|K_R|,$$

否则用$-u$代替u就可做到这点. 记

$$K_R(x^0,t^0)\times\{t<t^1\}=\widetilde{K}_R,$$

则

$$\begin{aligned}&|\{(x,t)\in\widetilde{K}_R\,|\,u\leqslant u_0\}|\\&\quad\geqslant\frac{1}{2}|K_R|-|k_R(x^0)\times(t^0-R^2/4,t^0)|\\&\quad=\frac{1}{4}|K_R|\geqslant\frac{1}{4}|\widetilde{K}_R|,\end{aligned}$$

做函数替换

$$v=\frac{\lambda}{2b_0}\left\{\exp\left[\frac{2b_0}{\lambda}(u-u_0)\right]-1\right\},$$

方程化为

$$\sum a_{ij}v_{x_ix_j}-\frac{2b_0}{\lambda}\exp\left[-\frac{2b_0}{\lambda}(u-u_0)\right]\sum a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}$$

$$+\exp\left[\frac{2b_0}{\lambda}(u-u_0)\right]b\left\{x,t,u,\right.$$

$$\left.\exp\left[-\frac{2b_0}{\lambda}(u-u_0)\right]Dv\right\}-v_t=0,$$

记

$$\mathscr{L}v=\sum a_{ij}v_{x_ix_j}-v_t,$$

我们有:

$$\mathscr{L}v\geqslant-\exp\left[-\frac{2b_0}{\lambda}(u-u_0)\right]\left(\frac{b_1^2}{4b_0}+b_2M+g\right)$$

$$\geqslant-K(b_1^2+b_2+g),$$

其中K仅与b_0, λ, M 有关.

今证当 $\operatorname*{osc}_{K_{R/2}}u\geqslant R^{\frac{n}{2(n+1)}}$ 而R较小时,必有

$$\max_{\tilde{K}_R}v>\left[1+\gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]\frac{\lambda}{2b_0}\left\{\exp\left[\frac{2b_0}{\lambda}(u_1-u_0)\right]-1\right\},\quad(10)$$

其中 $\gamma(1/4)$ 是对区域$\tilde{K}_R$的密度定理中的常数 $\gamma(\beta)|_{\beta=1/4}$. 如果(10)不成立,则

$$w=1-\frac{2b_0v}{\left[1+\gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]\lambda\left\{\exp\left[\frac{2b_0}{\lambda}(u-u_0)\right]-1\right\}}$$

于 $\tilde{K}_R$ 有 $w\geqslant0$, $|\{(x,t)\in\tilde{K}_R|w\geqslant1\}|\geqslant\frac{1}{4}|\tilde{K}_R|$,

$$\mathscr{L}w\leqslant\frac{2b_0K(b_1^2+b_2+g)}{\left[1+\gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]\lambda\left\{\exp\left[\frac{2b_0}{\lambda}(u_1-u_0)\right]-1\right\}}.$$

对 w 要应用密度定理，密度定理的条件除 $\mathscr{L} w \leqslant 0$ 外均满足。我们来验证在证明密度定理成立时所用到的引理 2，引理 2′ 及引理 3 当 R 小时在现在的情况下均成立，由此导出密度定理在现在的情况下成立。当 $c_1 \leqslant \frac{X_1}{R} \leqslant \frac{X_2}{R} \leqslant c_2$ 时，引理 2 的证明稍改变为：

$$u\big|_{\tau=LX_2^2,\ |x|\leqslant X_2/2} \geqslant \left(1-\frac{1}{4}\right)^m \left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{2M}$$

$$-\frac{KR^{n/(n+1)}\|b_1^2+b_2+g\|_{L^{n+1}(Q)}}{R^{n/[2(n+1)]}},$$

故当 R 小时，引理 2 成立。引理 2′，引理 3 的证法类似，因此有

$$w\big|_{x\in k_{R/2}(x^0),\ t=t'} \geqslant \gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

当 $R \leqslant R_0$ 时成立，特别有：

$$w(x^1, t^1) = 1-\frac{1}{1+\gamma(1/4)} = \frac{\gamma(1/4)}{1+\gamma(1/4)} \geqslant \gamma(1/4),$$

得出矛盾。因而 (10) 成立。

使 (10) 左端取到 max 的 u 设为 u_3。记

$$\frac{u_3-u_0}{u_1-u_0} = 1+\sigma,\ 则\ \sigma \geqslant 0.$$

要估计 σ 的下界，由

$$\exp\left[(1+\sigma)\frac{2b_0}{\lambda}(u_1-u_0)\right]-1 \geqslant \left[1+\gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$\cdot\left\{\exp\left[\frac{2b_0}{\lambda}(u_1-u_0)\right]-1\right\},$$

令

$$\exp\left[\frac{2b_0}{\lambda}(u_1-u_0)\right] = 1+\kappa,$$

则

$$1+\gamma\left(\frac{1}{4}\right) \leqslant \frac{(1+\kappa)^{1+\sigma}-1}{\kappa} \leqslant (1+\sigma)(1+\kappa)^{\sigma}$$

$$\leqslant (1+\sigma)\exp\left[\frac{4b_0M}{\lambda}\sigma\right],$$

$$\log\left[1+\gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]\leqslant \log(1+\sigma)+\frac{4b_0M}{\lambda}\sigma\leqslant\left(1+\frac{4b_0M}{\lambda}\right)\sigma,$$

$$\sigma\geqslant\frac{\log[1+\gamma(1/4)]}{1+4b_0M/\lambda}>0.$$

故当 $R\leqslant R_0$ 及 $\operatorname*{osc}_{K_{R/2}} u\geqslant R^{\frac{n}{2(n+1)}}$ 时,

$$\operatorname*{osc}_{K_R} u\geqslant\operatorname*{osc}_{\tilde{K}_R} u\geqslant u_3-u_2=\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)(u_1-u_2)$$

$$=\left(1+\frac{\sigma}{2}\right)\operatorname*{osc}_{K_{R/2}} u,$$

因此得到,当 $R\leqslant R_0$ 时有:

$$\operatorname*{osc}_{K_{R/2}} u\leqslant\frac{1}{1+\frac{\sigma}{2}}\operatorname*{osc}_{K_R} u+R^{\frac{n}{2(n+1)}},$$

由此式按常用的方法得到,u 在 Q 的抛物内闭区域中满足 Hölder 条件. 定理证毕.

u 在整个区域 Q 中满足 Hölder 条件的情况俟后讨论.

§5 拟线性抛物方程组解的 Hölder 条件估计

$Q=\Omega\times(0,T]$ 中二点 $P_1(x^1,t^1)$, $P_2(x^2,t^2)$ 的抛物距离记为

$$d(P_1,P_2)=(|x^2-x^1|^2+|t^2-t^1|)^{1/2}.$$

在 Q 中考察线性抛物算子组

$$\mathscr{L}_l=\sum a_{ij}^l(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum b_i^l\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$+c^l(x,t)-\frac{\partial}{\partial t},\quad(1\leqslant l\leqslant N),$$

满足条件

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum a_{ij}^l \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2,\ \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n,\ 0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty,$$

$$|b_i^l| \leqslant K_1,\ |c^l| \leqslant K_1,\ \forall (x, t) \in Q,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant N.$$

记 $a_+ = \max(a, 0)$, $a_- = \min(a, 0)$.

定理 8 设 $u_l \in W_{n+1}^{2,1}(Q)$, $\sup\limits_Q |u_l| \leqslant M_0$, $f_l \in C^1(\boldsymbol{R})$, $f_l' > 0$ 于 $\boldsymbol{R}$, $\mathscr{L}_l u_l \geqslant -K_2$ 于 Q 几乎处处 $(1 \leqslant l \leqslant N)$. 再设存在常数 $\gamma \in (0, 1]$, $\delta > 0$ 使 $\forall P_1, P_2 \in Q$, 当

$$4d(P_1, P_2) \leqslant d_{P_1P_2} = \min\{d(P_1, \partial^* Q),\ d(P_2, \partial^* Q)\}$$

($\partial^* Q$ 为 Q 的抛物边界),有:

$$\delta \sum_l [f_l(u_l(P_2)) - f_l(u_l(P_1))]_+ + \sum_l [f_l(u_l(P_2)) - f_l(u_l(P_1))]_- \leqslant K_2 d_{P_1P_2}^{-\gamma} d^\gamma(P_1, P_2),$$

则 $\forall P_1, P_2 \in Q$ 有:

$$\sum_l |u_l(P_2) - u_l(P_1)| \leqslant M d_{P_1P_2}^{-\beta} d^\beta(P_1, P_2) \left(K_2 + \sum_l \sup_Q |u_l|\right),$$

其中 $\beta = \min\{\alpha_0, \gamma\}$, $\alpha_0 = \alpha_0(N, n, \lambda, \Lambda, \delta) \in (0, 1)$, 当 $f_l(w) = w$ 时, M 仅依赖于 $N, n, \lambda, \Lambda, \delta, \gamma$; 当 f_l 为一般情况, M 还再依赖于 M_0 及 f_l' 于 $[-M_0, M_0]$ 中的正上、下界.

证 对 f_l 应用中值定理再变更常数 δ 与 K_2, 就化归特殊情况 $f_l(t) = t (1 \leqslant l \leqslant N)$, 因此仅需就这一特殊情况进行证明. 又可设 $-3K_1 \leqslant c^l(x, t) \leqslant -K_1$, $(\mathscr{L}_l - c^l)u_l \geqslant 0$, 否则可令

$$u_l = e^{-2K_1(t-t^0)}\left(v_l + M + \frac{K_2}{K_1}\right)$$

而考察 v_l 即可.

固定一点 $(x^0, t^0) \in Q$. 设 $Q_{R_0}(x^0, t^0) \subset Q$, $d(Q_{R_0}(x^0, t^0), \partial^* Q) \geqslant 4R_0$. 设 $R \leqslant R_0$. 为记号简略起见把 (x^0, t^0) 移到原点. 记

$$\sup_{Q_R} u_l(x, t) = M_l(R), \quad \inf_{Q_l} u_l(x, t) = m_l(R),$$

$$M_l(R)-m_l(R)=\omega_l(R),$$

$$\widetilde{Q}_R=B_R\times\left\{-R^2<t<-\frac{R^2}{4}\right\},$$

$$\Gamma_l=\left\{(x,t)\in\widetilde{Q}_R\,|\,u_l(x,t)\leqslant(1-\varepsilon)M_l\left(\frac{R}{2}\right)+\varepsilon m_l\left(\frac{R}{2}\right)\right\}.$$

其中 $\varepsilon\in(0,1)$ 为待定常数.

$$A=\left\{l\,\middle|\,|\Gamma_l|\geqslant\frac{1}{N+1}|\widetilde{Q}_R|\right\},\ B=\{1,2,\cdots,N\}\backslash A.$$

$\forall l\in A$ 有: $M_l(R)-u_l\geqslant 0$, $\mathscr{L}_l(M_l(R)-u_l)\leqslant 0$,

$$\left|\left\{(x,t)\in\widetilde{Q}_R\,\middle|\,\frac{M_l(R)-u_l}{M_l(R)-[(1-\varepsilon)M_l(R/2)+\varepsilon m_l(R/2)]}\geqslant 1\right\}\right|=|\Gamma_l|\geqslant\frac{1}{N+1}|\widetilde{Q}_R|,$$

由密度定理 1 得到,存在常数 $\eta\in(0,1)$ 使当 $(x,t)\in Q_{R/2}$ 时,

$$M_l(R)-u_l\geqslant\eta\{M_l(R)-[(1-\varepsilon)M_l(R/2)+\varepsilon m_l(R/2)]\},$$

因而

$$M_l(R)-M_l(R/2)\geqslant\eta\{M_l(R)-[(1-\varepsilon)M_l(R/2)+\varepsilon m_l(R/2)]\},$$

即

$$(1-\eta)M_l(R)\geqslant(1-\eta)M_l(R/2)+\varepsilon\eta\omega_l(R/2),$$

两端添加 $-(1-\eta)m_l(R)$ 并注意到 $m_l(R)\leqslant m_l(R/2)$ 得:

$$(1-\eta)\omega_l(R)\geqslant(1-\eta+\varepsilon\eta)\omega_l(R/2),$$

即

$$\omega_l(R/2)\leqslant\frac{1-\eta}{1-\eta+\varepsilon\eta}\omega_l(R),\quad\forall l\in A,\tag{11}$$

又 $\left|\widetilde{Q}_R\backslash\bigcup_{l\in B}\Gamma_l\right|\geqslant\frac{1}{N+1}|\widetilde{Q}_R|>0$,因而存在 $P_0\in\widetilde{Q}_R\backslash\bigcup_{l\in B}\Gamma_l$ 使

$$u_l(P_0)\geqslant(1-\varepsilon)M_l(R/2)+\varepsilon m_l(R/2),\quad\forall l\in B,\tag{12}$$

固定 $\bar{l}\in B$，取 $\tilde{P}\in\bar{Q}_{R/2}$ 使 $u_{\bar{l}}(\tilde{P})=m_{\bar{l}}(R/2)$. 由定理条件 ($f_l(t)=t$ 的情况)得:

$$K_2R_0^{-\gamma}d^{\gamma}(P_0,\tilde{P})\geqslant\delta[u_{\bar{l}}(P_0)-u_{\bar{l}}(\tilde{P})]_++\sum_{l=1}^{N}[u_l(P_0)-u_l(\tilde{P})]_-,\tag{13}$$

分别估计上式右边两项. 由 (12) 及 $\tilde{P}$ 的定义得:

$$\begin{aligned}u_{\bar{l}}(P_0)-u_{\bar{l}}(\tilde{P})&\geqslant(1-\varepsilon)M_{\bar{l}}(R/2)\\&\quad+\varepsilon m_{\bar{l}}(R/2)-m_{\bar{l}}(R/2)\\&=(1-\varepsilon)\omega_{\bar{l}}(R/2),\end{aligned}$$

其次当 $l\in B$ 时有:

$$\begin{aligned}u_l(P_0)-u_l(\tilde{P})&\geqslant(1-\varepsilon)M_l(R/2)+\varepsilon m_l(R/2)\\&\quad-M_l(R/2)\geqslant-\varepsilon\omega_l(R/2),\end{aligned}$$

当 $l\in A$ 时显然有

$$u_l(P_0)-u_l(\tilde{P})\geqslant m_l(R)-M_l(R)=-\omega_l(R),$$

这些式子代入 (13) 得:

$$K_2R_0^{-\gamma}R^{\gamma}\geqslant\delta(1-\varepsilon)\omega_{\bar{l}}(R/2)-\varepsilon\sum_{l\in B}\omega_l(R/2)-\sum_{l\in A}\omega_l(R),$$

对 $\bar{l}\in B$ 求和,得到

$$NK_2R_0^{-\gamma}R^{\gamma}\geqslant[\delta(1-\varepsilon)-N\varepsilon]\sum_{l\in B}\omega_l(R/2)-N\sum_{l\in A}\omega_l(R)$$

取定 ε 使 $\delta(1-\varepsilon)-N\varepsilon=\delta/2$，上式成为:

$$\sum_{l\in B}\omega_l(R/2)\leqslant\frac{2N}{\delta}\sum_{l\in A}\omega_l(R)+\frac{2N}{\delta}K_2R_0^{-\gamma}R^{\gamma},$$

这式子结合 (11) 得

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{N}\omega_l(R/2)&\leqslant\left(\frac{1-\eta}{1-\eta+\varepsilon\gamma}+\frac{2N}{\delta}\beta\right)\sum_{l\in A}\omega_l(R)\\&\quad+\frac{2N}{\delta}\beta K_2R_0^{-\gamma}R^{\gamma}+(1-\beta)\sum_{l\in B}\omega_l(R),\end{aligned}$$

其中 $\beta\in(0,1)$ 为待定常数. 取 β 使

$$\frac{1-\eta}{1-\eta+\varepsilon\gamma}+\frac{2N}{\delta}\beta=1-\beta$$

成立,即

$$\beta=\left(\frac{2N}{\delta}+1\right)^{-1}\frac{\varepsilon\eta}{1-\eta+\varepsilon\gamma},$$

因此

$$\sum_{l=1}^{N}\omega_l(R/2)\leqslant\tilde{\eta}\sum_{l=1}^{N}\omega_l(R)+K_2R_0^{-\gamma}R^{\gamma},$$

其中

$$\tilde{\eta}=\frac{1-\eta+\dfrac{2N}{2N+\delta}\varepsilon\gamma}{1-\eta+\varepsilon\gamma}.$$

当 $\dfrac{1+\tilde{\eta}}{2}\leqslant\dfrac{1}{2^{\gamma}}$ 时，取 $\gamma_1=\gamma$；当 $\dfrac{1+\tilde{\eta}}{2}>\dfrac{1}{2^{\gamma}}$ 时，取 γ_1 使 $\dfrac{1}{2^{\gamma_1}}=\dfrac{1+\tilde{\eta}}{2}$. 记

$$\sum_{l=1}^{N}\omega_l(R)+\frac{2K_2}{1-\tilde{\eta}}R_0^{-\gamma_1}R^{\gamma_1}=\phi(R),$$

我们得到

$$\phi(R/2)\leqslant\tilde{\eta}\phi(R)=2^{-\beta}\phi(R),$$

其中 $\beta=\log\dfrac{1}{\tilde{\eta}}\Big/\log 2$. 由上式得:

$$\phi(R)\leqslant\frac{1}{\tilde{\eta}}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta}\phi(R_0),\quad\forall R\leqslant R_0,$$

故有

$$\sum_{l=1}^{N}\omega_l(R)\leqslant\frac{1}{\tilde{\eta}}R_0^{-\beta}R^{\beta}\left[\frac{2K_2}{1-\tilde{\eta}}+\sum_{l=1}^{N}\omega_l(R_0)\right],$$

由于 (x^0,t^0) 为 Q 内任意点,定理得证.

定理 9 设 $u_l\in W_{n+1}^{2,1}(Q)$ $(1\leqslant l\leqslant N)$, $Q=\Omega\times(0,T]$, $g_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是定义于 Q 中的函数,满足

$$\left|\mathscr{L}u_l-\sum_{i=1}^{n}g_iu_{lx_i}\right|\leqslant K_1\left(1+\sum_{l,i}u_{lx_i}^2\right)^{\alpha},\quad 常数\ \alpha\in(0,1),$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i^2 \leqslant K_2\Big(1+\sum_{l,i} u_{lx_i}^2\Big),$$

其中

$$\mathscr{L}=\sum a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x,t)-\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\lambda|\xi|^2\leqslant \sum a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant \Lambda|\xi|^2,\quad \forall\xi\in \boldsymbol{R}^n,\quad 0<\lambda\leqslant\Lambda<\infty$$

$$|b_i|\leqslant K_1,\quad |c|\leqslant K_1.$$

则存在常数 $\beta\in(0,1)$ 与 $M>0$ 使 $\forall P_1, P_2\in Q$ 有

$$\sum_{l=1}^{N} |u_l(P_2)-u_l(P_1)|\leqslant M d_{P_1P_2}^{-\beta} d^\beta(P_1,P_2),$$

且 β 仅依赖于 n, λ, Λ, N; M 仅依赖于 $n, \lambda, \Lambda, N, \alpha, K_1, K_2$ 及

$$\sup_{Q}|u_l|=[u_l]_0\quad(1\leqslant l\leqslant N).$$

注 定理中 $\alpha<1$ 的限制是实质性的，因为 $\alpha=1$ 时定理的结论不能成立．这可由 E. Heinz 的下述例子知道．

$$u_{1t}-u_{1xx}=u_1(u_{1x}^2+u_{2x}^2),$$
$$u_{2t}-u_{2xx}=u_2(u_{1x}^2+u_{2x}^2)$$

有解 $u_1=\cos mx$, $u_2=\sin mx$, $\forall m\in\boldsymbol{R}$. 由于 m 可任意大，因此 u_1, u_2 于 Ω 的内闭区域 Hölder 估计不成立．

证 令 $v_l=\exp\Big[\eta u_l+\sigma\sum_{m=1}^{N}u_m^2\Big]$, η, σ 为待定正常数，则

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_l}\mathscr{L}v_l&=c+\eta\mathscr{L}u_l-cu_l+2\sigma\sum u_m(\mathscr{L}u_m-cu_m)\\
&\quad+2\sigma\sum a_{ij}u_{mx_i}u_{mx_j}+\sum a_{ij}(\eta u_{lx_i}+2\sigma\sum u_m u_{mx_i})\\
&\quad\cdot(\eta u_{lx_j}+2\sigma\sum u_m u_{mx_j})\\
&\geqslant c(1-\eta u_l-2\sigma\sum u_m^2)+\sum g_i(\eta u_{lx_i}+2\sigma\sum u_m u_{mx_i})\\
&\quad-K_2(\eta+2\sigma\sum|u_m|)\Big(1+\sum_{l,i}u_{lx_i}^2\Big)^\alpha+2\sigma\lambda\sum u_{mx_i}^2\\
&\quad+\lambda\sum(\eta u_{lx_i}+2\sigma\sum u_m u_{mx_i})^2\\
&\geqslant 2\sigma\lambda\sum u_{mx_i}^2-\frac{1}{2\lambda}\sum g_i^2-K_2(\eta+2\sigma\sum|u_m|)
\end{aligned}$$

$$\cdot\left(1+\sum_{l,i}u_{lx_i}^2\right)^\alpha + c(1-\eta u_l - 2\sigma\sum u_m^2),$$

应用 g_l 满足的不等式,并令 $\sigma=\dfrac{K_2}{2\lambda^2}$ 得:

$$\frac{1}{v_l}\mathscr{L}v_l \geqslant \frac{K_2}{2\lambda}\sum u_{mx_i}^2 - \frac{K_2^2}{2\lambda} - K_2\left(\eta+\frac{K_2}{2\lambda^2}\sum|u_m|\right)$$

$$\cdot\left(1+\sum_{l,i}u_{lx_i}^2\right)^\alpha + c\left(1-\eta u_l - \frac{K_2}{\lambda^2}\sum u_m^2\right)\geqslant -C,$$

C 仅与 n, N, λ, K_1, K_2, η, α, $\max\limits_{1\leqslant l\leqslant N}[u_l]_0$ 有关.

不失一般性可令

$$\sum_{l=1}^N u_l(x,t)=0,\quad \forall(x,t)\in Q, \tag{14}$$

否则取 $u_{N+k}=-u_k$ $(1\leqslant k\leqslant N)$, 而用 $\{u_l\}_1^{2N}$ 代替 $\{u_l\}_1^N$.

于定理 8 中取 $f_l(w)=\log w$ $(1\leqslant l\leqslant N)$ 得:

$$\begin{aligned}
I &\equiv \delta\sum[\log v_l(P_2)-\log v_l(P_1)]_+ + \sum[\log v_l(P_2)-\log v_l(P_1)]_-\\
&\leqslant \delta\{\eta\sum[u_l(P_2)-u_l(P_1)]_+ + N\sigma\sum|u_m^2(P_2)-u_m^2(P_1)|\\
&\quad + \{\eta\sum[u_l(P_2)-u_l(P_1)]_- + N\sigma\sum|u_m^2(P_2)-u_m^2(P_1)|\}\\
&\leqslant \delta\eta\sum[u_l(P_2)-u_l(P_1)]_+ + \eta\sum[u_l(P_2)-u_l(P_1)]_-\\
&\quad + 2(\delta+1)N\sigma\max_{1\leqslant l\leqslant N}[u_l]_0\sum|u_l(P_2)-u_l(P_1)|\\
&= \{\delta\eta+2(\delta+1)N\sigma\max[u_l]_0\}\sum[u_l(P_2)-u_l(P_1)]_+\\
&\quad + \{\eta-2(\delta+1)N\sigma\max[u_l]_0\}\sum[u_l(P_2)-u_l(P_1)]_-,
\end{aligned}$$

取 δ 使上式中两花括号相等,即

$$\delta=\frac{\eta-\dfrac{2NK_2}{\lambda^2}\max[u_l]_0}{\eta+\dfrac{2NK_2}{\lambda^2}\max[u_l]_0}.$$

当选 η 很大使上式右端为正时, $\delta>0$. 应用 (14) 得:

$$I\leqslant 0.$$

因此定理 8 的条件满足,即存在正常数 M 与 $\beta\in(0,1)$ 使

$$|v_l(P_2)-v_l(P_1)|\leqslant M d_{P_1P_2}^{-\beta}d^\beta(P_1, P_2),\quad 1\leqslant l\leqslant N.$$

因而

$$\eta|u_l(P_2)-u_l(P_1)|-2\sigma\max[u_m]_0\sum|u_m(P_2)-u_m(P_1)|$$
$$\leqslant M_1 d_{P_1P_2}^{-\beta}d^\beta(P_1, P_2),$$

对 l 相加得:

$$\left(\eta-\frac{K_2N}{\lambda^2}\max[u_m]_0\right)\sum|u_l(P_2)-u_l(P_1)|$$
$$\leqslant M_1 d_{P_1P_2}^{-\beta}d^\beta(P_1, P_2),$$

取 $\eta=1+\frac{2K_2N}{\lambda^2}\max[u_m]_0$，定理得证.

有待研究的问题是对蜕化抛物型方程能否建立适当的密度定理?

第九章　完全非线性抛物型方程

设Ω为$\boldsymbol{R}^n$中的有界区域，$Q=\Omega\times(0,T]$. 设函数 $F(x, t, z, p, r)$ 定义于 $S=Q\times R\times R^n\times \$^n$，其中 $\$^n$ 是实n阶对称矩阵，矩阵每一元素 $\in \boldsymbol{R}$. 本章讨论完全非线性抛物方程

$$u_t - F(x, t, u, Du, D^2u) = 0, \tag{1}$$

研究解的先验估计[42],[43]，并证明在一定条件下第一边值问题解为存在、唯一[44],[45]，即

$$u|_{\partial^* Q} = \varphi, \tag{2}$$

φ于∂^*Q上为已给函数. ∂^*Q 为Q的抛物边界，即

$$\partial^*Q = \partial\Omega\times[0, T]\cup\Omega\times\{t=0\}.$$

对F的详细假设将逐步给出. 先谈一下大致的假设：

(i) 于S内，F对x, z, p, r二次连续可微，对t一次连续可微且 $r_{ij}=r_{ji}(i, j=1, 2, \cdots, n)$.

(ii) 存在常数λ, Λ满足$0<\lambda\leqslant\Lambda<\infty$使于$S$有：

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad \forall\xi\in\boldsymbol{R}^n.$$

(iii) F关于变量r为凸，即

$$\sum \frac{\partial^2 F}{\partial r_{ij}\partial r_{kl}}\eta_{ij}\eta_{kl}\leqslant 0, \quad \forall\eta_{ij}\in\$^n.$$

(iv) F满足自然结构条件.

完全非线性方程的背景是 Bellman 方程 $F(x, t, u, u_i, u_{ij}) = \sup\limits_{\omega\in\Omega}[\sum a_{ij}(\omega)u_{ij}+\sum b_i(\omega)u_i + c(\omega)u + f(\omega, x)] = 0$ 与 Monge-Ampere 方程 $F=\det(u_{x_ix_j})+f(x, t, u, u_{x_i})=0$. 但 Bellman 方程$F$不光滑，Monge Ampere 方程是边上蜕化的椭圆方程，两

者都要从上述的完全非线性方程作逼近才可得到．作逼近的事需另作讨论．

§1 解 u 的有界估计与 $D_x u$ 的内估计

先导出 (1), (2) 的解 u 的有界估计．

定理 1 设于 S 有 $\sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \xi_i \xi_j \geqslant 0$, $\forall \xi \in \boldsymbol{R}^n$, 且

$$uF(x, t, u, 0, 0) \leqslant \mu_1 u^2 + \mu_2, \quad \forall x, t, u \in Q \times \boldsymbol{R}$$

成立，其中 μ_1, μ_2 为正常数，$u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ 为 (1), (2) 的解，则有

$$\max_{\bar{Q}} |u| \leqslant \inf_{\lambda > \mu_1} \left\{ e^{\lambda T} \max \left[\left(\frac{\mu_2}{\lambda - \mu_1} \right)^{1/2}, \sup_{\partial^* Q} |\varphi| \right] \right\} = M_0.$$

证 (1) 写成

$$u_t - \sum a_{ij} u_{x_i x_j} = F(x, t, u, Du, 0),$$

其中

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} (x, t, u, Du, \tau D^2 u) d\tau.$$

再令 $u = e^{\lambda t} v$ (常数 $\lambda > \mu_1$)，于 $\bar{Q}$ 中考察 v^2 的最大值，就得到定理中的估计式．证毕．

记

$$[u]_{k,j} = \sup_{P \in Q} d_P^{k+j} |D_x^j u(P)|,$$

$$[u]_{k,j+\beta} = \sup_{P_1, P_2 \in Q} d_{P_1 P_2}^{k+j+\beta} \frac{|D_x^j u(P_2) - D_x^j u(P_1)|}{d^\beta(P_1, P_2)},$$

$$0 < \beta < 1.$$

其中 $d_P = d(P, \partial^* Q)$, $d_{P_1 P_2} = \min(d_{P_1}, d_{P_2})$, 当 $P_i = (x^i, t^i)$ $(i = 1, 2)$ 时，$d(P_1, P_2) = [|x^2 - x^1|^2 + |t^2 - t^1|]^{1/2}$. 当 $k = 0$ 时，$[u]_{0,j}$, $[u]_{0,j+\beta}$ 简记为 $[u]_j$, $[u]_{j+\beta}$.

定理 2 设 u 是 (1) 于 Q 的解且 $\sup_{\bar{Q}} |u| \leqslant M_0$. 又设 F 满足

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

$$\forall (x, t, z, p, r) \in S;$$

$$|F(x, t, z, p, 0)| \leqslant \mu_1(1 + |p|^2),$$

$$\forall (x, t, z, p) \in Q \times [-M_0, M_0] \times \boldsymbol{R}^n.$$

则存在常数 $\beta \in (0, 1)$ 与 $M_\beta > 0$ 使

$$[u]_\beta \leqslant M_\beta,$$

其中 β, M_β 仅依赖于 n, λ, Λ, μ_1, M_0 与 diam Q.

证 把 (1) 写为

$$\sum a_{ij}u_{x_ix_j} + F(x, t, u, Du, 0) - u_t = 0,$$

其中

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, t, u, Du, \tau D^2u)d\tau.$$

因此令

$$g_i = -\frac{F(x, t, u, Du, 0)}{1 + |Du|^2}u_{x_i} \ (1 \leqslant i \leqslant n),$$

则有

$$\sum a_{ij}u_{x_ix_j} - u_t - g_iu_{x_i} = -\frac{F(x, t, u, Du, 0)}{1 + |Du|^2},$$

应用前一章定理 9 得到,存在 $\beta \in (0, 1)$, $C > 0$ 使

$$|u(P_2) - u(P_1)| \leqslant Cd_{P_1P_2}^{-\beta}d^\beta(P_1, P_2)$$

成立. 定理证毕.

再考察 D_xu 的内估计.

定理 3 设 $D_xu \in C^{2,1}(Q)$. u 是 (1) 于 Q 的解且 $[u]_0 \leqslant M_0$, $[u]_\beta \leqslant M_\beta$. 又设 F 满足

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n$$

$$|F| + |F_z| + |F_p|(1 + |p|) + |F_x|(1 + |p|)^{-1}$$
$$\leqslant \mu_2(1 + |p|^2 + |r|).$$

则

$$[u]_1 \leqslant C,$$

C 仅依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \mu_1, M_1, \beta, M_\beta$ 及 $\mathrm{diam}\, Q$.

证 记 $[u]_1 = M$. 不妨设 $M < \infty$, 否则用抛物内闭区域 $Q_\varepsilon \subset Q$ 代替 Q 进行证明,再令 $\varepsilon \to 0$. 当 $M < 2\sqrt{2}$ 时,定理已得证. 现设 $M \geqslant 2\sqrt{2}$.

存在点 $\bar{P}(\bar{x}, \bar{t}) \in Q$ 使 $\frac{M}{2} \leqslant d_{\bar{P}} |D_x u(\bar{P})| \leqslant M$, 即

$$\frac{M}{2d_{\bar{P}}} \leqslant |D_x u(\bar{P})| \leqslant \frac{M}{d_{\bar{P}}}.$$

考察柱体 $Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P})$. $\forall P \in Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P})$ 有:

$$d_{\bar{P}} - \sqrt{2}\, \frac{d_{\bar{P}}}{M} \leqslant d_P \leqslant d_{\bar{P}} + \sqrt{2}\, \frac{d_{\bar{P}}}{M}.$$

由于 $M \geqslant 2\sqrt{2}$, 因此由上式得:

$$\frac{1}{2} d_{\bar{P}} \leqslant d_P \leqslant \frac{3}{2} d_{\bar{P}},$$

且附带地有

$$Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P}) \subset Q, \quad |D_x u(P)| \leqslant \frac{M}{d_P} \leqslant 2\frac{M}{d_{\bar{P}}}.$$

于 $\overline{Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P})}$ 中考察函数

$$v(x, t) = \eta^2(x, t)|D_x u|^2 + \alpha \frac{M^2}{d_{\bar{P}}^2} [u(x,t) - u(\bar{P})]^2,$$

其中 α 为待定正常数, $\eta(x, t)$ 为 $Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P})$ 中的截断函数于 $Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P})$ 中满足

$$0 \leqslant \eta(x, t) \leqslant 1, \quad \eta(\bar{P}) = 1, \quad \eta_{\partial^* Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P})} = 0,$$

$$|D_x \eta| \leqslant C\frac{M}{d_{\bar{P}}}, \quad |\eta_t| \leqslant C\frac{M^2}{d_{\bar{P}}^2}, \quad |D_x^2 \eta| \leqslant C\frac{M^2}{d_{\bar{P}}^2}.$$

设 v 于 $P_0(x^0, t^0) \in \overline{Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P})}$ 处取到最大值,则

$$\frac{M^2}{4d_{\bar{P}}^2} \leqslant |D_x u(\bar{P})|^2 = v(\bar{P}) \leqslant v(P_0) = \eta^2(P_0)|D_x u(P_0)|^2$$

$$+\alpha\frac{M^2}{d_{\bar{P}}^2}[u(P_0)-u(\bar{P})]^2\leqslant\eta^2(P_0)|D_xu(P_0)|^2$$

$$+\alpha\frac{M^2}{d_{\bar{P}}^2}M_\beta^2\left(\frac{d_{\bar{P}}}{M}\right)^{2\beta}.$$

区别下列两种情况.

情况1. $\alpha M_\beta^2\left(\frac{d_{\bar{P}}}{M}\right)^{2\beta}\geqslant\frac{1}{8}$.

这情况下，$M\leqslant(8\alpha M_\beta^2)^{1/2\beta}d_{\bar{P}}$.

情况2. $\alpha M_\beta^2\left(\frac{d_{\bar{P}}}{M}\right)^{2\beta}<\frac{1}{8}$.

这情况下，$\frac{M^2}{8d_{\bar{P}}^2}\leqslant\eta^2(P_0)|D_xu(P_0)|^2\leqslant\eta^2(P_0)\cdot 4\frac{M^2}{d_{\bar{P}}^2}$, 因而 $\eta^2(P_0)\geqslant\frac{1}{32}$. 附带地得到，$P_0$ 不在 $\partial^*Q_{d_{\bar{P}}/M}$ 上.

考察抛物算子

$$\mathscr{L}v=\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}v_{x_ix_j}+\sum\frac{\partial F}{\partial p_i}v_{x_i}-v_t,$$

则在 P_0 点有

$$\begin{aligned}0\geqslant\mathscr{L}v=&|D_xu|^2\mathscr{L}(\eta^2)+\eta^2\mathscr{L}(|D_xu|^2)\\&+2\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\eta^2)_{x_i}(|D_xu|^2)_{x_j}+2\alpha\frac{M^2}{d_{\bar{P}}^2}\\&\cdot[u-u(\bar{P})]\mathscr{L}u+2\alpha\frac{M^2}{d_{\bar{P}}^2}\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}u_{x_i}u_{x_j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathscr{L}(\eta^2)|=&\left|\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\eta^2)_{x_ix_j}+\sum\frac{\partial F}{\partial p_i}(\eta^2)_{x_i}-(\eta^2)_t\right|\\\leqslant&C_1(1+|p|^2+|r|),\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}(|D_xu|^2)=2\sum u_{x_k}\mathscr{L}u_{x_k}+2\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}u_{x_kx_i}u_{x_kx_j},$$

$$\begin{aligned}|\mathscr{L}u_{x_k}|=&\left|\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(u_{x_ix_j})_{x_k}+\sum\frac{\partial F}{\partial p_i}(u_{x_i})_{x_k}-\frac{dF}{dx_k}\right|\\=&\left|\frac{\partial F}{\partial u}u_{x_k}+\frac{\partial F}{\partial x_k}\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant C_2(1+|p|)(1+|p|^2+|r|).$$

$$|\mathscr{L}u| = \left|\sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} u_{x_ix_j} + \sum \frac{\partial F}{\partial p_i} u_{x_i} - F\right|$$

$$\leqslant C_3(1+|p|^2+|r|).$$

由上面诸不等式并结合 $\eta^2(P_0) \geqslant \frac{1}{32}$ 得:

$$\frac{\alpha\lambda}{2}|p|^4 + \frac{\lambda}{16}|r|^2 \leqslant 2\alpha\frac{M^2}{d_P^2}\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} u_{x_i}u_{x_j} + 2\eta^2\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} u_{x_kx_i}u_{x_kx_j}$$

$$\leqslant |D_xu|^2|\mathscr{L}(\eta^2)| + 2\eta^2|\sum u_{x_k}\mathscr{L}u_{x_k}|$$

$$+ 2\left|\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\eta^2)_{x_i}(|D_xu|^2)_{x_j}\right| + 2\alpha\frac{M^2}{d_P^2}|[u-u(\bar{P})]\mathscr{L}u|$$

$$\leqslant C_4(1+|p|^2)(1+|p|^2+|r|)$$

$$+ C_5\alpha M_\beta|p|^{2-\beta}(1+|p|^2+|r|)$$

$$\leqslant C_6|p|^4 + \frac{\lambda}{32}|r^2| + C_7\alpha M_\beta|p|^{-\beta}(|p|^4+|r|^2),$$

这里应用了 $|p| \geqslant 1$. 当 $|p| < 1$ 时, $M^2 \leqslant 8d_P^2$, 定理已得证.

因此有

$$\left(\frac{\alpha\lambda}{2} - C_6\right)|p|^4 + \frac{\lambda}{32}|r|^2 \leqslant C_7\alpha M_\beta|p|^{-\beta}(|p|^4+|r|^2),$$

取 $\alpha = \frac{2C_6}{\lambda} + \frac{1}{16}$ 得

$$\frac{M^2}{8d_P^2} \leqslant |p|^2 \leqslant \left(\frac{32C_7\alpha M_\beta}{\lambda}\right)^{2/\beta}.$$

综合情况 1, 2 得:

$$M \leqslant \max\left\{(8\alpha M_\beta^2)^{1/2\beta}, \sqrt{8}, \sqrt{8}\left(\frac{32C_7\alpha M_\beta}{\lambda}\right)^{1/\beta}\right\}d_P.$$

定理证毕.

§2 二阶微商的内有界估计

在作二阶微商的估计之前，先作 $D_x u$ 的 C^α 内估计.

定理 4 设 u 是 (1) 于 Q 的解. $D_x u \in C^{2,1}(Q)$, $[u]_0 \leqslant M_0$, $[u]_1 \leqslant M_1$. 且 F 满足

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda |\xi|^2 \text{ 于 } S, \ \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n.$$

$$|F| + |F_z| + |F_p| + |F_x| \leqslant \mu_3(1 + |r|)$$

于

$$Q \times [-M_0, M_0] \times \{|p| \leqslant M_1\} \times \$^n,$$

则存在 $\beta \in (0, 1)$, $C > 0$ 使

$$[u]_{1+\beta} \leqslant C,$$

β, C 仅依赖于 n, λ, Λ, μ_3 及 $\operatorname{diam} Q$.

证 令 $v_k = u_{x_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. 记

$$\mathscr{L} = \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t},$$

(1) 关于 x_k 求微商得:

$$\mathscr{L} v_k + \sum \frac{\partial F}{\partial p_i} v_{k x_i} = -\frac{\partial F}{\partial z} v_k - \frac{\partial F}{\partial x_k}.$$

又记 $-\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = g_i$, 则有

$$|\mathscr{L} v_k - \sum g_i v_{k x_i}| \leqslant C\left(1 + \sum_{i=1}^n |D v_i|\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\sum_{i=1}^n g_i^2 \leqslant C\left(1 + \sum_{k=1}^n |D v_k|^2\right).$$

定理的结论由前一章定理 9 导出.

再作 $D_x^2 u$ 的上估计. 引入方向微商记号

$$u_{(\xi)} = \sum_{i=1}^n u_{x_i} \xi_i,$$

$$u_{(\xi)(\xi)}=\sum_{i=1}^{n}u_{(\xi)x_i}\xi_i=\sum_{i,j=1}^{n}u_{x_ix_j}\xi_i\xi_j.$$

定理 5 设 u 是 (1) 于 Q 的解，$D_x^2u\in C^{2,1}(Q)$，$[u]_0\leqslant M_0$，$[u]_1\leqslant M_1$，$[u]_{1+\beta}\leqslant M_{1+\beta}$，且 F 满足定理 4 的诸条件. 再设

$$\forall(x,t,u,p,r)\in Q\times[-M_0,M_0]\times\{|p|\leqslant M_1\}\times\$^n,$$

$$\forall\xi=(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{u}_i,\tilde{u}_{ij})\in\boldsymbol{R}^{2n+1}\times\$^n$$

有

$$F_{(\xi)(\xi)}\leqslant\mu_4\left\{\left(1+\sum_{i,j}|u_{ij}|^2\right)^{3/2}(|\tilde{x}|^2+|\tilde{u}|^2)+\left(1+\sum_{i,j}|u_{ij}|\right)\sum_i|\tilde{u}_i|^2+\left[\left(1+\sum_{i,j}|u_{ij}|\right)\cdot(|\tilde{x}|+|\tilde{u}|)+\sum_i|\tilde{u}_i|\right]\sum_{i,j}|\tilde{u}_{ij}|\right\},$$

则

$$\sup_{P\in Q}\{d_P^2\max_{|\xi|=1}[u_{(\xi)(\xi)}(P)]_+\}\leqslant C,$$

C 仅依赖于 n, λ, Λ, μ_3, μ_4, M_0, M_1, $M_{1+\beta}$, β 与 $\operatorname{diam}Q$.

注 1 当 $\tilde{x}=\tilde{u}=\tilde{u}_1=\cdots=\tilde{u}_n=0$ 时，$F_{(\xi)(\xi)}\leqslant 0$ 就是 F 关于 r 为凸的条件.

注 2 $\max\limits_{|\xi|=1}u_{(\xi)(\xi)}$ 是矩阵 $\{u_{x_ix_j}\}$ 的最大特征值.

证 记

$$\sup_{P\in Q}\{d_P^2\max_{|\xi|=1}[u_{(\xi)(\xi)}(P)]_+\}=M,$$

要估计 M，可设 $2\sqrt{2}\leqslant M<\infty$. 因此

$$\max_{|\xi|=1}[u_{(\xi)(\xi)}(P)]_+=\max_{|\xi|=1}u_{(\xi)(\xi)}(P).$$

则存在 $\bar{P}(\bar{x},\bar{t})\in Q$ 使

$$\frac{M}{2d_{\bar{P}}^2}\leqslant\max_{|\xi|=1}u_{(\xi)(\xi)}(\bar{P})\leqslant\frac{M}{d_{\bar{P}}^2}.$$

于柱体 $\overline{Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P})}$ 中考察函数

$$\eta^2[\max_{|\xi|=1}u_{(\xi)(\xi)}]^2+\alpha\frac{M^2}{d_{\bar{P}}^4}|D_xu-D_xu(\bar{P})|^2,$$

α 为待定常数，η 为截断函数，η 满足的条件与定理 3 中一样. 当上式于 $P_0(x^0, t^0) \in Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P})$ 处取到最大值时，区分两情况.

情况 1. 于 P_0 点 $\alpha|D_x u - D_x u(\bar{P})|^2 \geqslant \frac{1}{8}$. 这情况下

$$M \leqslant (8\alpha M_{1+\beta}^2)^{1/2\beta} d_{\bar{P}}^2.$$

情况 2. 于 P_0 点 $\alpha|D_x u - D_x u(\bar{P})|^2 < \frac{1}{8}$. 这情况下

$$\frac{M^2}{8d_{\bar{P}}^4} \leqslant \eta^2[\max_{|\xi|=1} u_{(\xi)(\xi)}]^2 \leqslant \eta^2 \frac{16M^2}{d_{\bar{P}}^4},$$

因此

$$\eta^2 \geqslant \frac{1}{128}, \quad P_0 \in Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P}).$$

由于二重最大值考察不方便，要化为单重最大值来考察. 首先，它是 $\eta^2 u_{(\xi)(\xi)}^2 + \alpha \frac{M^2}{d_{\bar{P}}^4}|D_x u - D_x u(\bar{P})|^2$ 于 $Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P}) \times \{|\xi| = 1\}$ 上的 $u_{(\xi)(\xi)} \geqslant 0$ 的最大值. 又它是

$$-[R - \eta u_{(\xi)(\xi)}]^2 + \eta^2 u_{(\xi)(\xi)}^2 + \alpha \frac{M^2}{d_{\bar{P}}^4} |D_x u - D_x u(\bar{P})|^2$$

于 $Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P}) \times \{|\xi| = 1\} \times \{0 \leqslant R < +\infty\}$ 的最大值. 因而又是

$$v(x, t, \xi) = 2\eta u_{(\xi)(\xi)} - |\xi|^4 + \alpha \frac{M^2}{d_{\bar{P}}^4} |D_x u - D_x u(\bar{P})|^2$$

于 $Q_{d_{\bar{P}}/M}(\bar{P}) \times \boldsymbol{R}^n$ 的最大值 $v(x^0, t^0, \xi^0)$.

取到最大值的条件是 $\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \xi_i} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$ 及下面的半负定条件.

由 $\frac{\partial v}{\partial \xi_i} = 0$ 导出

$$|\xi^0|^2 = \eta(P_0) \max_{|\xi|=1} u_{(\xi)(\xi)}(P_0), \quad 因而\ |\xi^0| \leqslant \frac{4M}{d_{\bar{P}}^2}.$$

半负定条件是

$$\sum(v_{x_ix_j}\hat{x}_i\hat{x}_j+2v_{x_i\xi_j}\hat{x}_i\xi_j+v_{\xi_i\xi_j}\xi_i\xi_j)\leqslant 0,\quad \forall\hat{x}_i,\ \xi_i\in R^n.$$

由此消去 ξ_i 有困难，这困难可用下法克服．任取 $\varepsilon>0$ 则

$$\sum[v_{x_ix_j}\tilde{x}_i\tilde{x}_j+2v_{x_i\xi_j}\tilde{x}_i\xi_j+(v_{\xi_i\xi_j}-\varepsilon\delta_{ij})\xi_i\xi_j]<0$$

当 x_i, $\xi_i\in R^n$ 及 $|\xi|\neq 0$ 时成立．上式取到最小，必然是

$$v_{x_i\xi_j}\tilde{x}_i=(\varepsilon\delta_{ij}-v_{\xi_i\xi_j})\xi_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

代入上式得：

$$\sum_{i,j}\left[v_{x_ix_j}+\sum_{k,l}v_{x_i\xi_k}(\varepsilon\delta_{kl}-v_{\xi_k\xi_l})^{-1}v_{x_j\xi_l}\right]\tilde{x}_i\tilde{x}_j<0$$

当 $\tilde{x}_i\in R^n$, $|\tilde{x}|\neq 0$ 时成立．由上面几个式子得到，当我们记

$$\mathscr{L}v=\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}v_{x_ix_j}+\sum\frac{\partial F}{\partial p_i}v_{x_i}-v_t,$$

则于 (x^0, t^0, ξ^0) 点有：

$$\mathscr{L}v+\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}v_{x_i\xi_k}(\varepsilon\delta_{kl}-v_{\xi_k\xi_l})^{-1}v_{x_j\xi_l}\leqslant 0.$$

现算出上式左边诸项并进行估计．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}v=&2\eta\mathscr{L}u_{(\xi)(\xi)}+2u_{(\xi)(\xi)}\mathscr{L}\eta+4\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\eta_{x_i}u_{(\xi)(\xi)x_j}\\&+2\alpha\frac{M^2}{d_p^4}\sum[u_{x_k}-u_{x_k}(\bar{P})]\mathscr{L}u_{x_k}+2\alpha\frac{M^2}{d_p^4}\\&\cdot\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}u_{x_kx_i}u_{x_kx_j},\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}u_{(\xi)(\xi)}=\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}u_{(\xi)(\xi)x_ix_j}+\sum\frac{\partial F}{\partial p_i}u_{(\xi)(\xi)x_i}-\frac{d^2F}{d\xi^2},$$

$$\frac{dF}{d\xi}=\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}u_{x_ix_j(\xi)}+\sum\frac{\partial F}{\partial p_i}u_{x_i(\xi)}+\frac{\partial F}{\partial z}u_{(\xi)}+F_{(\xi)}=\bar{F}_{(\bar{\xi})},$$

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}=\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}u_{x_ix_j(\xi)(\xi)}+\sum\frac{\partial F}{\partial p_i}u_{x_i(\xi)(\xi)}+\frac{\partial F}{\partial z}u_{(\xi)(\xi)}+F_{(\bar{\xi})(\bar{\xi})},$$

其中 $\bar{\xi}$ 的 $(n+1)^2$ 个分量为 ξ, $u_{(\xi)}$, $u_{x_i(\xi)}$, $u_{x_ix_j(\xi)}$．因此

$$\mathscr{L}u_{(\xi)(\xi)}=-\frac{\partial F}{\partial z}u_{(\xi)(\xi)}-F_{(\bar{\xi})(\bar{\xi})}\geqslant -C(1+|r|^3)$$

$$
\begin{aligned}
&-\mu_4\{(1+|r^3|)(|\xi|^2+|u_{(\xi)}|^2)+(1+|r|) \\
&\cdot\sum|u_{x_i(\xi)}|^2+[(1+|r|)(|\xi|+|u_{(\xi)}|) \\
&+\sum|u_{x_i(\xi)}|]\sum|u_{x_ix_j(\xi)}|\} \\
\geqslant& -C[1+|r|^4+(1+|r|^{3/2})|D_x^2u_{(\xi)}|],
\end{aligned}
$$

其中 $|r|=(\sum u_{x_ix_j}^2)^{1/2}$. 又

$$
|\mathscr{L}\eta|\leqslant C\left[\frac{M^2}{d_p^2}+(1+|r|)\frac{M}{d_p}\right]\leqslant C(1+|r|^2),
$$

$$
|\mathscr{L}u_{x_k}|=\left|\frac{\partial F}{\partial z}u_{x_k}+\frac{\partial F}{\partial x_k}\right|\leqslant C(1+|r|),
$$

$$
\begin{aligned}
|\eta_{x_i}u_{(\xi)(\xi)x_j}|&\leqslant C\frac{M}{d_p}(1+|r|^{1/2})|D_x^2u_{(\xi)}| \\
&\leqslant C(1+|r|^{3/2})|D_x^2u_{(\xi)}|.
\end{aligned}
$$

把矩阵 $(\varepsilon\delta_{kl}-v_{\xi_k\xi_l})$ 对角化，即知对任何 $\zeta\in\boldsymbol{R}^n$ 有：

$$
\zeta^T(\varepsilon\delta_{kl}-v_{\xi_k\xi_l})^{-1}\zeta\geqslant\frac{|\zeta|^2}{\mathrm{Tr}(\varepsilon\delta_{kl}-v_{\xi_k\xi_l})},
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}v_{x_i\xi_k}(\varepsilon\delta_{kl}-v_{\xi_k\xi_l})^{-1}v_{x_j\xi_l}&\geqslant\lambda\sum v_{x_i\xi_k}(\varepsilon\delta_{kl} \\
-v_{\xi_k\xi_l})^{-1}v_{x_i\xi_l}&\geqslant\lambda\frac{\sum|v_{x_i\xi_k}|^2}{\mathrm{Tr}(\varepsilon\delta_{kl}-v_{\xi_k\xi_l})},
\end{aligned}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
v_{x_i\xi_k}&=4[\eta u_{(\xi)x_ix_k}+\eta_{x_i}u_{(\xi)x_k}], \\
v_{\xi_k\xi_l}&=4(\eta u_{x_kx_l}-|\xi|^2\delta_{kl}-2\xi_k\xi_l),
\end{aligned}
$$

故得

$$
\begin{aligned}
&\sum|v_{x_i\xi_k}|^2\geqslant 8|D_x^2u_{(\xi)}|^2-C(1+|r|^5), \\
&0<\mathrm{Tr}(\varepsilon\delta_{kl}-v_{\xi_k\xi_l})=n\varepsilon+4[(n+2)|\xi|^2-\eta\Delta u] \\
&\quad\leqslant n\varepsilon+4(n+2)|\xi|^2\leqslant C|r|,
\end{aligned}
$$

当取 $\varepsilon=|r|$ 时。

综合上述诸不等式得：

$$
\begin{aligned}
&\alpha|r|^4+C_1\frac{|D_x^2u_{(\xi)}|^2-C_2(1+|r|^5)}{|r|} \\
&\qquad\leqslant C_3(1+|r|^{3/2})|D_x^2u_{(\xi)}|+C_4(1+|r|^4)
\end{aligned}
$$

$$+ C_5\alpha(1+|r|^3),$$

取 $\alpha = C_1C_2 + \dfrac{C_3}{4C_1^2} + C_4 + 1$，由上式得出 $|r|$ 为有界：$|r| \leqslant C_6$，因此 $M \leqslant C_7 d_{\bar{P}}^2$。

两情况下 M 均有了估计．定理证毕。

再考察 u_t 的内估计．

定理 6 设 u 是 (1) 于 Q 的解，$u_t \in C^{2,1}(Q)$，且 $[u]_0 \leqslant M_0$，$[u_1] \leqslant M_1$．F 除满足定理 4 的假设外，再设

$|F_t| \leqslant \mu_5(1+|r|^2)$ 于 $Q \times [-M_0, M_0] \times \{|p| \leqslant M_1\} \times \$^n$，则

$$[u_t]_{2,0} \leqslant C,$$

C 仅依赖于 n，λ，Λ，μ_3，μ_5，M_0，M_1 与 diam Q。

证　令 $[u_t]_{2,0} = M$．不妨设 $M < \infty$．定出 $\bar{P}$ 使

$$\frac{M}{2d_{\bar{P}}^2} \leqslant |u_t(\bar{P})| \leqslant \frac{M}{d_{\bar{P}}^2}.$$

于柱体 $\overline{Q_{d_{\bar{P}}/2}(\bar{P})}$ 内考察函数

$$v(x,t) = \eta^2 u_t^2 + \alpha \frac{M}{d_{\bar{P}}^2} |D_x u|^2,$$

v 于 $P_0(x^0, t^0) \in \overline{Q_{d_{\bar{P}}/2}(\bar{P})}$ 取到最大值，则

$$\frac{1}{2} d_{\bar{P}} \leqslant d_P \leqslant \frac{3}{2} d_{\bar{P}}.$$

于 P_0 点有：

$$u_t^2(P_0) \leqslant \frac{M^2}{d_P^4} \leqslant \frac{16M^2}{d_{\bar{P}}^4},$$

$$\frac{M^2}{4d_{\bar{P}}^4} \leqslant u_t^2(\bar{P}) \leqslant \eta^2(P_0)u_t^2(P_0) + \frac{\alpha M}{d_{\bar{P}}^2}|D_x u(P_0)|^2$$

$$\leqslant \eta^2(P_0)\frac{16M^2}{d_{\bar{P}}^4} + \frac{\alpha M_1^2 M}{d_{\bar{P}}^4}.$$

情况 1. $\dfrac{\alpha M_1^2 M}{d_{\bar{P}}^4} \geqslant \dfrac{M^2}{8d_{\bar{P}}^4}$，则 $M \leqslant 8M_1^2\alpha$。

情况 2. $\frac{\alpha M_1^2 M}{d_{\bar{P}}^4} < \frac{M^2}{8 d_{\bar{P}}^4}$，则 $\eta^2(P_0) \geqslant \frac{1}{128}$，$P_0 \in Q_{d_{\bar{P}/2}}(\bar{P})$，$u_t^2(P_0) \geqslant \frac{M^2}{8 d_{\bar{P}}^4}$.

令

$$\mathscr{L} v = \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} v_{x_i x_j} + \frac{\partial F}{\partial p_i} v_{x_i} - v_t,$$

则于 P_0 点有

$$\begin{aligned}
&2\eta^2 \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} u_{t x_i} u_{t x_j} + 2\alpha \frac{M}{d_{\bar{P}}^2} \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \\
&\leqslant \left| u_t^2 \mathscr{L}(\eta^2) + 2\eta^2 u_t \mathscr{L}(u_t) + 2\sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} (\eta^2)_{x_i} (u_t^2)_{x_j} \right. \\
&\quad \left. + 2\alpha \frac{M}{d_{\bar{P}}^2} u_{x_k} \mathscr{L}(u_{x_k}) \right|,
\end{aligned}$$

又

$$u_t^2[|\mathscr{L}(\eta^2)| + |D_x \eta|^2] \leqslant C \frac{M}{d_{\bar{P}}^2} \left[1 + \frac{|r|^2}{d_{\bar{P}}} + \frac{1+|r|}{d_{\bar{P}}^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
|u_t \mathscr{L}(u_t)| &= \left| u_t \left(\sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} u_{x_i x_j t} + \sum \frac{\partial F}{\partial p_i} u_{x_i t} - \frac{dF}{dt} \right) \right| \\
&= |u_t (F_u u_t + F_t)| \leqslant \frac{4M}{d_{\bar{P}}^2} |F_u F + F_t| \leqslant C \frac{M}{d_{\bar{P}}^2} (1 + |r|^2),
\end{aligned}$$

$$|\mathscr{L}(u_{x_k})| = \left| \frac{\partial F}{\partial u} u_{x_k} + \frac{\partial F}{\partial x_k} \right| \leqslant \frac{C}{d_{\bar{P}}} (1 + |r|),$$

当 $|r| < 1$ 时，$|u_t| \leqslant C$，定理得证. $|r| \geqslant 1$ 时，适当地定出常数 α，由上述诸不等式结合可估出 $|r|$，$|u_t|$ 与 M. 定理证毕.

再作 $D_x^2 u$ 的内估计.

定理 7 当定理 5、定理 6 的假设都成立时有:

$$[u]_2 \leqslant C,$$

C 仅依赖于 n, λ, Λ, μ_3, μ_4, μ_5, M_0, M_1, $M_{1+\beta}$, β 与 diam Q.

证 方程 (1) 可写为

$$u_t - F(x, t, u, u_{x_i}, 0) = \sum a_{ij} u_{x_i x_j}, \tag{3}$$

其中

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, t, u, u_{x_i}, \tau u_{x_i x_j}) d\tau.$$

固定 (x, t)，矩阵 $(u_{x_i x_j})$ 的特征值与单位特征函数设为 μ^k，$(\xi_1^k, \cdots, \xi_n^k)$，则 $\mu^k = u_{(\xi^k)(\xi^k)}$，$\mu^k \leqslant \frac{C}{d_P^2}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

设最小特征值为 μ^1. 当 $\mu^1 \geqslant 0$ 时，定理已为真. 当 $\mu^1 < 0$ 时，把 $u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^n \mu^k \xi_i^k \xi_j^k$ 代入 (3)，得到：

$$u_t - F(x, t, u, u_{x_i}, 0) \leqslant \mu^1 \sum a_{ij} \xi_i^1 \xi_j^1 + \frac{C}{d_P^2} \leqslant \lambda \mu^1 + \frac{C}{d_P^2},$$

由于

$$|u_t| \leqslant \frac{C}{d_P^2}, \quad |F(x, t, u, u_{x_i}, 0)| \leqslant C|D_x u|^2 + C \leqslant \frac{C}{d_P^2},$$

代入上式得：

$$\lambda \mu^1 \geqslant -\frac{C}{d_P^2}.$$

故总的有

$$|\mu^k| \leqslant \frac{C}{d_P^2}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad |u_{x_i x_j}| = \left| \sum_{k=1}^n \mu^k \xi_i^k \xi_j^k \right| \leqslant \frac{C}{d_P^2}.$$

定理得证.

§3 二阶微商的 Hölder 条件内估计

要作出 u 的 $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}$ 内估计. 以 $Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (\varepsilon, T]$ 代替 $Q = \Omega \times (0, T]$. 为书写简单，Q_ε 改记为 Q(底面仍记为 $t = 0$).

定理 8 设 u 是 (1) 于 Q 的解，且 $u_t \in C^{2,1}(Q)$，$\|u\|_{C^{2,1}(Q)} \leqslant M_2$. 设 F 满足

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad 0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty,$$

$$\xi \in \boldsymbol{R}^n, \quad (x, t, u, p, r) \in S.$$

$|F|, |DF|, |D^2F| \leqslant \mu_6$ 于 $Q \times \{|p| \leqslant M_1\} \times \{\|r\| \leqslant M_2\}$
则存在 $\beta \in (0, 1)$, $C > 0$ 使

$$[u_t]_\beta \leqslant C,$$

其中 β, C 仅依赖于 n, λ, Λ, μ_6, M_2 与 diam Q.

证 方程 (1) 对 t 微商,并令 $u_t = v$ 得:

$$\sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} v_{x_i x_j} + \sum \frac{\partial F}{\partial p_i} v_{x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} v + \frac{\partial F}{\partial t} - v_t = 0,$$

即 v 满足有界可测系数的抛物型方程. 定理的结论由前一章定理 9 得出. 证毕.

为了证明 $D_x^2 u$ 满足 Hölder 条件,需要有正定对称矩阵分解的有关引理.

n 维对称矩阵 $A \in \$^n$, 引入欧氏范数,得到欧氏空间(不管矩阵乘法) $\mathscr{A}$. 对 $0 < \lambda < \infty$, 记

$\mathscr{A}[\lambda] = \{A \in \mathscr{A} \mid \lambda I < A < \lambda^{-1} I\}$ (I 为单位矩阵).

引理 9 存在正整数 $N < \infty$, 常数 $\rho_0 > 0$ 与单位向量 $\gamma_1, \cdots, \gamma_N \in \boldsymbol{R}^n$, 使得 $\forall A \in \mathscr{A}[\lambda]$ 可表为

$$A = \sum_{i=1}^{N} \beta_i(A) \gamma_i \otimes \gamma_i, \quad \rho_0 \leqslant \beta_i(A) \leqslant \rho_0^{-1}.$$

其中 N, ρ_0, $\gamma_1, \cdots, \gamma_N$ 仅依赖于 n, λ. 且 $\gamma_i \otimes \gamma_i (1 \leqslant i \leqslant N)$ 张成 $\mathscr{A}$.

证 易证 $\mathscr{A}[\lambda]$ 是 $\mathscr{A}$ 中的有界凸开集, 且 $\mathscr{A}[\lambda] \subset\subset \mathscr{A}[\lambda/2]$ (即 $\mathscr{A}[\lambda]$ 的闭包在 $\mathscr{A}[\lambda/2]$ 内部),因此存在一个开的凸多面体 π 使

$$\mathscr{A}[\lambda] \subset\subset \pi \subset \mathscr{A}[\lambda/2].$$

π 存在性如下导出,记 $d\{\mathscr{A}[3\lambda/4], \partial \mathscr{A}[\lambda/2]\} = 2d_1 > 0$. 用长为 d_1 的 n^2 维坐标格子把 $\mathscr{A}$ 划分为小正方体, 小正方体与 $\mathscr{A}[3\lambda/4]$ 有交点的全部顶点构成的凸多面体记为 π, 则 $\mathscr{A}[\lambda]$

$\subset\subset\mathscr{A}[3\lambda/4]\subset\pi$，又由于$\mathscr{A}[\lambda/2]$为凸，故有 $\pi\subset\mathscr{A}[\lambda/2]$.

π的顶点记为 $A_1,\cdots,A_{N_1}$. 设 A_k 的特征值与单位特征向量为 $\lambda_i(k)$，$l_i(k)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $\lambda/2<\lambda_i(k)<2/\lambda$，由于 $\mathscr{A}[\lambda]\subset\subset\pi$，取 ρ_0 很小，使做到

$$\mathscr{A}[\lambda]-\rho_0\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{n}l_i(k)\otimes l_i(k)\subset\pi$$

再取 ρ_0 更小一些，使再满足 $\rho_0+\frac{2}{\lambda}\leqslant\frac{1}{\rho_0}$.

由于 π 是凸多面体，故 $\forall A\in\mathscr{A}[\lambda]$，存在 $p_k(1\leqslant k\leqslant N_1)$ 使 $p_k\geqslant 0$，$\sum p_k=1$ 及

$$A-\rho_0\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{n}l_i(k)\otimes l_i(k)=\sum_{k=1}^{N_1}p_kA_k,$$

于是

$$A=\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{n}[\rho_0+p_k\lambda_i(k)]l_i(k)\otimes l_i(k).$$

取 $N=N_1n$，$\beta_{ik}=\rho_0+p_k\lambda_i(k)$，把 $\{l_i(k)\}_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant k\leqslant N_1}$ 排成单下标向量 $\gamma_i(1\leqslant i\leqslant N)$.

再由 $I\in\mathscr{A}[\lambda]$，$I+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)e_i\otimes e_i\in\mathscr{A}[\lambda]$，$I+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)\frac{e_i\pm e_j}{\sqrt{2}}\otimes\frac{e_i\pm e_j}{\sqrt{2}}\in\mathscr{A}[\lambda]$ (e_i 为单位向量). 因此 $\mathscr{A}$ 可由 $\mathscr{A}[\lambda]$ 张成. 故也可由 $\gamma_i\otimes\gamma_i(1\leqslant i\leqslant N)$ 张成. 引理得证.

定理 10 设 u 是(1)于 Q 的解，且 $D_x^2u\in C^{2,1}(Q)$，$\|u\|_{C^{2,1}(Q)}\leqslant M_2$，$[u_t]_\beta\leqslant M_{t\beta}$，$\beta\in(0,1)$. 又设 F 满足定理 8 的条件及

$$F_{(\tilde{\xi})(\tilde{\xi})}\leqslant\mu_7[|\tilde{x}|^2+|\tilde{u}|^2+\sum|\tilde{u}_i|^2+(|\tilde{x}|+|\tilde{u}|+\sum|\tilde{u}_i|)\sum|\tilde{u}_{ij}|],$$
$$\forall\tilde{\xi}=(\tilde{x},\tilde{u},\tilde{u}_i,\tilde{u}_{ij})\in\$^n.$$

则存在 $\alpha\in(0,1)$，$C>0$ 使

$$[D_x^2u]_\alpha\leqslant C,$$

其中 α，C 仅依赖于 n，λ，Λ，μ_7，M_2，$M_{t\beta}$，β 及 $\operatorname{diam}Q$.

证 不失一般性可设 $\Lambda = 1/\lambda$. 对 $\mathscr{A}[\lambda]$ 由引理 9 确定 N, ρ_0 与 $\gamma_1, \cdots, \gamma_N$. 令

$$v_k = u_{(\gamma_k)(\gamma_k)} + \varepsilon \sum_{l=1}^{N} [M_2 + u_{(\gamma_l)(\gamma_l)}]^2,$$

其中 $\varepsilon(<1)$ 为待定正数. 则

$$\mathscr{L} u_{(\xi)(\xi)} = -\frac{\partial F}{\partial z} u_{(\xi)(\xi)} - F_{(\xi)(\xi)},$$

该式的导出见定理 5. 因此

$$\mathscr{L} v_k = \mathscr{L} u_{(\gamma_k)(\gamma_k)} + 2\varepsilon \sum_{l} [M_2 + u_{(\gamma_l)(\gamma_l)}] \mathscr{L}' u_{(\gamma_l)(\gamma_l)}$$

$$+ 2\varepsilon \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} u_{(\gamma_l)(\gamma_l)x_i} u_{(\gamma_l)(\gamma_l)x_j} \geqslant -C(1 + |D_x^3 u|)$$

$$+ 2\varepsilon\lambda \sum_{l} |D_x u_{(\gamma_l)(\gamma_l)}|^2 \geqslant -C_\varepsilon, \quad (1 \leqslant k \leqslant N),$$

最后不等式的成立，是因为应用引理 9 的结论，$\mathscr{A}$ 可由 $\mathscr{A}[\lambda]$ 张成导出，$u_{x_i x_j}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ 可由 $u_{(\gamma_l)(\gamma_l)}$ 张成.

再由

$$[F(x, t, u, D_x u, D_x^2 u) - u_t]_{P_2} - [F(x, t, u, D_x u, D_x^2 u) - u_t]_{P_1} = 0$$

及 $[u_t]_\beta \leqslant M_{t\beta}$, $\|u\|_{C^{2,1}(Q)} \leqslant M_2$ 得

$$\left|\sum a_{ij}[u_{x_i x_j}(P_2) - u_{x_i x_j}(P_1)]\right| \leqslant K d_{P_1 P_2}^{-\beta} d^\beta(P_1, P_2),$$

其中 a_{ij} 满足

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n.$$

应用引理 9 得

$$K d_{P_1 P_2}^{-\beta} d^\beta(P_1, P_2) \geqslant \sum a_{ij}[u_{x_i x_j}(P_2) - u_{x_i x_j}(P_1)] = \sum_{k=1}^{N} \beta_k (U_{k2}$$

$$- U_{k1}) \geqslant \rho_0 \sum_{k=1}^{N} (U_{k2} - U_{k1})_+ + \frac{1}{\rho_0} \sum_{k=1}^{N} (U_{k2} - U_{k1})_-,$$

其中 $u_{(\gamma_k)(\gamma_k)}(P_i)$ 简记为 $U_{ki}(i = 1, 2;\ k = 1, 2, \cdots, N)$. 又

$$v_k(P_2) - v_k(P_1) = U_{k2} - U_{k1} + \varepsilon \sum (U_{l2} - U_{l1}) \cdot (2M_2 + U_{l2} + U_{l1})$$

因此对 $0<\delta\leqslant 1$ 有

$$\delta\sum_{k=1}^{N}[v_k(P_2)-v_k(P_1)]_+ + \sum_{k=1}^{N}[v_k(P_2)-v_k(P_1)]_-$$
$$\leqslant \delta\sum(U_{k2}-U_{k1})_+ + \sum(U_{k2}-U_{k1})_- + C\varepsilon\sum|U_{k2}-U_{k1}|$$
$$=(\delta+C\varepsilon)\sum(U_{k2}-U_{k1})_+ + (1-C\varepsilon)\sum(U_{k2}-U_{k1})_-$$
$$\leqslant \frac{2\rho_0}{2+\rho_0^2}\left[\rho_0\sum(U_{k2}-U_{k1})_+ + \frac{1}{\rho_0}\sum(U_{k2}-U_{k1})_-\right]$$
$$\leqslant K d_{P_1P_2}^{-\beta} d^{\beta}(P_1,P_2),$$

当取 $C\varepsilon\leqslant\delta=\dfrac{\rho_0^2}{2+\rho_0^2}$ 时上式成立．因此可应用前一章定理 8，即存在 $\alpha\in(0,\beta)$ 与 $C>0$ 使

$$\sum|v_k(P_2)-v_k(P_1)|\leqslant C d_{P_1P_2}^{-\alpha} d^{\alpha}(P_1,P_2),$$

由此式得到

$$(1-NC\varepsilon)\sum|U_{k2}-U_{k1}|\leqslant C d_{P_1P_2}^{-\alpha} d^{\alpha}(P_1,P_2),$$

取 ε 使 $C\varepsilon=\min(\delta,1/2N)$，由上式得到

$$\sum|U_{k2}-U_{k1}|\leqslant 2C d_{P_1P_2}^{-\alpha} d^{\alpha}(P_1,P_2,),$$

再 $u_{x_ix_j}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 用 $u_{(\tau_k)(\tau_k)}(1\leqslant k\leqslant N)$ 作线性表示，由上式得出定理的结论．证毕．

§4 u 的近边 Hölder 条件估计

转向考察方程 (1), (2) 的解 u 在边界附近的估计．边界附近分为三种情况．一是近底 $\Omega\times\{t=0\}$，二是近侧面 $\partial\Omega\times(0,T]$，三是近底与侧面的相交部分 $\partial\Omega\times\{t=0\}$．后者基本上可归入近侧面的情况一并考察．设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中有界区域，$Q=\Omega\times(0,T]$．于 Q 内算子

$$\mathscr{L}=\sum a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial t} \tag{4}$$

满足

$$\lambda|\xi|^2\leqslant\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2,\quad \forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,\quad 0<\lambda\leqslant\Lambda<\infty.$$

引理 11 设 $v\in W^{2,1}_{n+1}(Q)$ 满足 $[v]_0\leqslant M_0$ 及 $\mathscr{L}v\geqslant -K_2\cdot(1+|D_xv|^2)$ 于 Q，其中 $\mathscr{L}$ 满足 (4)。又设 $v(x,0)\in C^\beta(\Omega)$ $(0<\beta\leqslant 1)$。则有 $\beta_1\in(0,\ \beta/2)$ 与 $C>0$ 使 $\forall P(x,\ t)\in Q$ 有:

$$[v(x,\ t)-v(x,\ 0)]_+\leqslant C([v]_{\beta,t=0}+1)d_x^{-\beta}t^{\beta_1},$$

其中

$$[v]_{\beta,t=0}=\sup_{x^1,x^2\in\Omega}\frac{|v(x^2,\ 0)-v(x^1,\ 0)|}{|x^2-x^1|^\beta},$$

C 仅依赖于 $n,\ \lambda,\ \Lambda,\ K_1,\ K_2,\ M_0$。

证 令

$$\eta(x)=\left(1-\frac{|x-x^0|^2}{R^2}\right)^2,\quad w=\eta\{e^{\sigma[v-v(x^0,0)]}-1\},$$

其中 $R<d(x^0)=d(x^0,\ \partial\Omega)$，$\sigma$ 为待定常数。则

$$\mathscr{L}w=\eta\sigma e^{\sigma[v-v(x^0,0)]}\Big(\mathscr{L}v+\sigma\sum a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}$$

$$+2\sum a_{ij}\frac{1}{\eta}\eta_{x_i}v_{x_j}\Big)+\{e^{\sigma[v-v(x^0,0)]}-1\}\mathscr{L}\eta,$$

取 $\sigma=2K_2/\lambda$，则由上式及关于 $\mathscr{L}v$ 的条件得:

$$\mathscr{L}w\geqslant -C_1-C_2\frac{M_0}{R^2},$$

应用 Александров 型极值原理得:

$$\sup_{\substack{|x-x^0|\leqslant R\\0\leqslant t\leqslant\tau}}w(x,\ t)_+\leqslant\sup_{|x-x^0|\leqslant R}w(x,\ 0)$$

$$+C_3R^{n/(n+1)}\left(C_1+C_2\frac{M_0}{R^2}\right)\left(\int_{\substack{|x-x^0|\leqslant R\\0\leqslant t\leqslant\tau}}dxdt\right)^{1/(n+1)}$$

$$\leqslant C_4(1+[v]_{\beta,t=0})R^\beta+C_5\left(\frac{\tau}{R^2}\right)^{1/(n+1)},$$

当 $\tau<d_{x^0}^{2+(n+1)\beta}$ 时，取 $R=\tau^{1/[2+(n+1)\beta]}$，则由上式得:

$$[v(x^0,\ \tau)-v(x^0,\ 0)]_+\leqslant C_6(1+[v]_{\beta,t=0})d_{x^0}^{-\beta}\tau^{\beta/[2+(n+1)\beta]},$$

当 $\tau\geqslant d_{x^0}^{2+(n+1)\beta}$ 时，上式显然成立。取 $\beta_1=\dfrac{\beta}{2+(n+1)\beta}$，引

理得证。

设 $\partial\Omega\in C^2$，则可作 x 坐标的双向非奇异变换，使 $\partial\Omega$ 的一部分化到 $x_n=0$ 上的 $|x|<R_0$ 部分，而 $\Omega\subset\{x_n>0\}$。

引理 12 设 $v\in W^{2,1}_{n+1}(Q)$，满足 $[v]_0\leqslant M_0$ 及 $\mathscr{L}v\geqslant -K_3\cdot(1+|D_xv|^2)$ 于 Q，其中 $\mathscr{L}$ 满足 (4)。又设 $v|_{x_n=0}\in C^{\beta,\beta/2}(\{|x|<R_0\}\times\{0\leqslant t\leqslant T\})$，$(0<\beta<1)$。则当 $x_n>0$，$|x|<R/2$，$t^0+R^2/2\leqslant t\leqslant t^0+R^2$ $(t^0\geqslant 0,\ R\leqslant R_0)$ 时有 $\beta_1\in(0,\beta)$ 使

$$[v(x,t)-v(x,t)|_{x_n=0}]_+\leqslant C_7(1+[v]_{\beta,\beta/2,x_n=0})\left(\frac{x_n}{R}\right)^{\beta_1};\quad (5)$$

又当 $x_n>0$，$|x|\leqslant R/2$ 时有：

$$[v(x,t)-v(x,t)_{x_n=t=0}]_+\leqslant C_8(1+[v]_{\beta,\beta/2,x_n=0})\left(\frac{x_n^2+t}{R^2}\right)^{\beta_1/2}\quad (6)$$

证 不失一般性可就 $x_1=\cdots=x_{n-1}=0$ 进行证明即可。当 $t^0+R^2/2\leqslant t^1\leqslant t^0+R^2$ 时，记 $v^*=v(0,\cdots,0,t^1)$，

$$\eta(x,t)=\left(1-\frac{|x|^2}{R^2}\right)^m\left(\frac{t-t^0}{R^2}\right)^m,$$

$$s=\frac{x_n}{R}+\varepsilon\left[\frac{(t-t^1)^2}{R^4}+\frac{\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}{R^2}\right]+\varepsilon_1,$$

$$w(x,t)=\eta(x,t)s^{-\alpha}(v-v^*)_+^m,$$

其中 $m(>2)$ 为偶整数，ε 为小正常数，常数 α 满足

$$0<\alpha\leqslant\min\left\{\frac{1}{2(n+1)},\ \frac{m\beta}{4}\right\},\ \varepsilon_1 \text{ 为小正数。}$$

当 $|x|<R$，$t^0<t\leqslant t^0+R^2$ 时有：

$$w|_{x_n=0}\leqslant C_1\left(\frac{R^2}{\varepsilon}\right)^{\alpha}\left[\frac{(v|_{x_n=0}-v^*)_+}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2+|t-t^1|\right)^{\alpha/m}}\right]^m$$

$$\leqslant C_l[v]^m_{\beta,\beta/4,x_n=0}R^{\beta m},$$

$$\mathscr{L} w = s^{-\alpha}(v - v^*)_+^m \mathscr{L}\eta + \eta s^{-\alpha}\mathscr{L}(v - v^*)_+^m + \eta(v - v^*)_+^m \mathscr{L} s^{-\alpha} + 2\sum a_{ij}\Big[s^{-\alpha}\frac{\partial(v - v^*)_+^m}{\partial x_i}\eta_{x_j} + \eta\frac{\partial s^{-\alpha}}{\partial x_i}\frac{\partial(v - v^*)_+^m}{\partial x_j} + (v - v^*)_+^m\frac{\partial s^{-\alpha}}{\partial x_i}\eta_{x_j}\Big],$$

$$\mathscr{L}\eta \geqslant -C_3\frac{1}{R^2}\eta^{1-1/m},$$

$$\mathscr{L}(v - v^*)_+^m = m(m-1)(v - v^*)_+^{m-2}\sum a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + m(v - v^*)_+^{m-1}\mathscr{L} v \geqslant m(v - v^*)_+^{m-2} \cdot [(m-1)\lambda|D_x v|^2 - 2K_2M_0(1 + |D_x v|^2)]$$

$$\geqslant C_3(v - v^*)_+^{m-2}|D_x v|^2 - C_4,\text{ 当 } m \geqslant 1 + \frac{4K_2M_0}{\lambda},$$

$$\mathscr{L} s^{-\alpha} \geqslant \alpha(\alpha+1)s^{-\alpha-2}\lambda\frac{1 + 4\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}{R^2} - \alpha s^{-\alpha-1}\Lambda\frac{2n\varepsilon}{R^2}$$

$$\geqslant \alpha\frac{s^{-\alpha-2}}{R^2}(\lambda - 4n\Lambda\varepsilon) \geqslant \frac{\alpha\lambda}{2}\frac{s^{-\alpha-2}}{R^2},\text{ 当取 } \varepsilon \leqslant \frac{\lambda}{8n\Lambda},$$

ε_1 充分小时，

$$\left|\sum 2a_{ij}\frac{\partial(v - v^*)_+^m}{\partial x_i}\eta_{x_j}\right| \leqslant 2\Lambda m(v - v^*)_+^{m-1}|D_x v|\frac{2m\eta^{1-1/m}}{R}$$

$$\leqslant \frac{C_3}{2}(v - v^*)_+^{m-2}\eta|D_x v|^2 + C_5\frac{\eta^{1-2/m}}{R^2},$$

$$\left|2\sum a_{ij}\frac{\partial s^{-\alpha}}{\partial x_i}\frac{\partial(v - v^*)_+^m}{\partial x_j}\right| \leqslant C_6\frac{\alpha s^{-\alpha-1}}{R}|D_x v|(v - v^*)_+^{m-1}$$

$$\leqslant \frac{C_3}{2}(v - v^*)_+^{m-2}s^{-\alpha}|D_x v|^2 + \frac{C_7\alpha^2}{R^2}s^{-\alpha-2}(v - v^*)_+^m,$$

$$\left|2\sum a_{ij}\frac{\partial s^{-\alpha}}{\partial x_i}\eta_{x_j}\right| \leqslant \frac{C_8\alpha}{R^2}s^{-\alpha-1}\eta^{1-1/m}$$

$$\leqslant \frac{1}{R^2}\left(\frac{\alpha\lambda}{4}\eta s^{-\alpha-2} + C_9\alpha\eta^{1-2/m}s^{-\alpha}\right),$$

当 m，ε 满足上述诸限制，并取 $\alpha \leqslant \frac{\lambda}{4C_7}$，由此得到：

$$\mathscr{L} w \geqslant -\frac{C_{10}}{R^2}\eta^{1-2/m_S-\alpha} \geqslant -\frac{C_{11}}{R^2}\left(\frac{R^2}{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\right)^{\alpha}.$$

应用 Александров 型极值原理得:

$$\sup_{\substack{|x|\leqslant R, x_n\geqslant 0\\ t^0\leqslant t\leqslant t^0+R^2}} w(x,t) \leqslant C_2[v]^m_{\beta,\beta/2,x_n=0}R^{\beta m} + C_{12}R^{n/(n+1)+2\alpha-2}$$

$$\cdot\left[\iint_{\substack{|x|\leqslant R, x_n\geqslant 0\\ t^0\leqslant t\leqslant t^0+R^2}} (\sum x_i^2)^{-(n+1)\alpha}dxdt\right]^{1/(n+1)},$$

$$\leqslant C_{13}(1+[v]_{\beta,\beta/2,x_n=0})^m,$$

因此

$$[v(0,\cdots,0,x_n,t^1)-v(0,\cdots,0,t^1)]_+$$

$$\leqslant C_{14}(1+[v]_{\beta,\beta/2,x_n=0})\left(\frac{x_n}{R}+\varepsilon_1\right)^{\alpha/m}$$

令 $\varepsilon_1\to 0$, 记 $\alpha/m=\beta_1$, 则 $x_1=\cdots=x_{n-1}=0$ 情况下的 (5) 式得证。 $x_1=\cdots=x_{n-1}=0$ 情况下的 (6) 式，把 η 中的因子 $\left(\frac{t-t^0}{R^2}\right)^m$ 略去，估出 $[v(x,t)-v|_{x_n=0}]_+$，再 $[v|_{x_n=0}-v|_{x_n=t=0}]_+$ 由前式及边上的 v 满足 Hölder 条件估出。引理证毕。

定理 13 设 $\partial\Omega\in C^2$, $u\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$ 为 (1), (2) 的解，且 $\varphi\in C^{\beta,\beta/2}(\partial^*Q)$, $[u]_0\leqslant M_0$, $\|\varphi\|_{C^\beta(\partial^*Q)}\leqslant M_\beta$. F 满足定理 2 的条件. 则

$$[u]_\alpha\leqslant C(1+M_\beta),$$

其中 α, C 仅依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \mu_1, M_0, \beta$ 及 $\operatorname{diam} Q$.

证 $\forall P_1(x^1,t^1)$, $P_2(x^2,t^2)\in Q$, 由内估计定理 2 得到，存在 $\beta_2\in(0,1)$ 使

$$|u(P_2)-u(P_1)|\leqslant Cd_{P_1P_2}^{-\beta_2}d^{\beta_2}(P_1,P_2).$$

当 $d(P_1,P_2)<d^2_{P_1P_2}$ 时，由上式得:

$$|u(P_2)-u(P_1)|\leqslant Cd^{\beta_2/2}(P_1,P_2).$$

当 $d(P_1,P_2)\geqslant d^2_{P_1P_2}$ 时，分两情况.

情况 1. $d_{P_1P_2}=\min(t^1,t^2)^{1/2}$. 不妨设 $\min(t^1,t^2)=t^1$, 则

$$t^2 = t^1 + (t^2 - t^1) \leqslant d(P_1, P_2) + d^2(P_1, P_2) \leqslant 2d(P_1, P_2).$$

由于 (1) 可写为:

$$\mathscr{L} u = \sum a_{ij} u_{x_i x_j} - u_t = -F(x, t, u, D_x u, 0),$$

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} (x, t, u, D_x u, \tau D_x^2 u) d\tau,$$

因此

$$\lambda |\xi|^2 \leqslant \sum a_{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda |\xi|^2,$$

$$|F(x, t, u, D_x u, 0)| \leqslant K_2 |D_x u|^2 + K,$$

故可应用引理 11 于 u 与 $-u$ 得到，当 $d(P_1, P_2) < \min (d_{x^1}, d_{x^2})^{2\beta/\beta_1}$ 时，

$$|u(x^2, t^2) - u(x^2, 0)| \leqslant C d_{x^2}^{-\beta_1} t_2^{\beta_1}$$

$$\leqslant C \frac{[2d(P_1, P_2)]^{\beta_1}}{d(P_1, P_2)^{\beta_1/2}} = C_1 d^{\beta_1/2}(P_1, P_2),$$

又有

$$|u(x^1, t^1) - u(x^1, 0)| \leqslant C_1 d^{\beta_1/2}(P_1, P_2),$$

因此

$$|u(x^2, t^2) - u(x^1, t^1)| \leqslant |u(x^2, t^2) - u(x^2, 0)|$$

$$+ |u(x^1, t^1) - u(x^1, 0)| + |u(x^2, 0) - u(x^1, 0)|$$

$$\leqslant C d^\gamma (P_1, P_2), \quad \gamma = \min (\beta, \beta_1/2).$$

当 $d(P_1, P_2) > \min (d_{x^1}, d_{x^2})^{2\beta/\beta_1}$ 时，不妨设 $\min (d_{x^1}, d_{x^2}) = d_{x^1}$，易证 $d_{x^2} \leqslant |x^2 - x^1| + d_{x^1}$，因此 $d_{x^2} \leqslant 2 d^{\beta_1/2\beta}(P_1, P_2)$. 故有:

$$\max \{d_{x^1}, d_{x^2}, (t^1)^{1/2}, (t^2)^{1/2}\} \leqslant 2 d^{\beta_1/2\beta}(P_1, P_2),$$

并入下面情况一起讨论.

情况 2. $d_{P_1 P_2} = \min (d_{x^1}, d_{x^2})$. 不妨设 $\min(d_{x^1}, d_{x^2}) = d_{x^1}$. 则

$$d_{x^2} \leqslant |x^2 - x^1| + d_{x^1} \leqslant d(P_1, P_2) + d^{1/2}(P_1, P_2)$$

$$\leqslant 2 d^{1/2}(P_1, P_2).$$

当 $\min (t^1, t^2) > d^{2/3}(P_1, P_2)$ 时，取 $R = d^{1/3}(P_1, P_2)$, $t^0 = t^i - d^{2/3}(P_1, P_2)$, (当 $i = 1, 2$). 应用 (5) 于 u 与 $-u$, 并记 $d_{x^i} = |x^i - y^i|$, $y^i \in \partial\Omega (i = 1, 2)$ 得

$$|u(x^i, t^i) - u(y^i, t^i)| \leqslant C\left[\frac{d_{x^i}}{d^{1/3}(P_1, P_2)}\right]^{\beta_1} \leqslant Cd^{\beta_1/6}(P_1, P_2),$$

又

$$\begin{aligned}|y^2 - y^1| &\leqslant |x^2 - y^2| + |x^1 - y^1| + |x^2 - x^1| \\ &\leqslant 4d^{1/2}(P_1, P_2),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|u(P_2) - u(P_1)| &\leqslant |u(x^2, t^2) - u(y^2, t^2)| + |u(x^1, t^1) \\ &\quad - u(y^1, t^1)| + |u(y^2, t^2) - u(y^1, t^1)| \\ &\leqslant 2Cd^{\beta_1/6}(P_1, P_2) + Cd^{\beta}(P_1, P_2) \\ &\leqslant 3Cd^{\gamma}(P_1, P_2), \quad \text{其中 } \gamma = \min\{\beta_1/6, \beta\}.\end{aligned}$$

当 $\min(t^1, t^2) \leqslant d^{2/3}(P_1, P_2)$ 时，

$$\max\{d_{x^1}, d_{x^2}, (t^1)^{1/2}, (t^2)^{1/2}\} \leqslant 2d^{1/3}(P_1, P_2).$$

取 R 为常数. 当 $d(P_1, P_2) \leqslant R^{\max(6, 2\beta/\beta_1)}$ 时，对 u 与 $-u$ 应用估计式 (6)，而得到 u 满足 Hölder 条件的式子. $u \geqslant R$ 时，u 满足 Hölder 条件是显然的. 综合上述各种情况，定理得证.

§5 $D_x u$ 的近边有界估计与 Hölder 条件估计

再作 $D_x u$ 的边界估计，全局有界估计与全局的 $C^{\alpha, \alpha/2}$ 估计.

定理 14 设 $\partial\Omega \in C^2$, $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ 为 (1), (2) 的解，且 $\varphi \in C^{2,1}(\partial^* Q)$, $[u]_0 \leqslant M_0$, F 满足定理 4 的条件. 则

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\partial\Omega \times [0,T]} &\leqslant C[1 + \|\varphi\|_{C^{2,1}(\partial\Omega \times [0,T])} \\ &\quad + \|\varphi\|_{C^1(\Omega \times \{t=0\})}]\end{aligned}$$

其中 N 为 $\partial\Omega$ 的内法线，又 C 仅与 $n, \lambda, \Lambda, M_0, T$ 及 $\partial\Omega$ 的 C^2 系数有关.

证 做坐标的双方非奇异变换，把 $\partial\Omega$ 的一部分化为 $\{x | x_n = 0, |x| < R_0\}$ 而 $\Omega \subset \{x | x_n > 0\}$. 设 $Q_{R,T} = \{(x, t) | |x_i| < R\ (1 \leqslant i \leqslant n-1),\ 0 < x_n < R,\ 0 < t < T\} \subset Q$, 其中 $0 < R < R_0$. 作闸函数

$$v=\log\left(1+\frac{x_n}{R}+\frac{\varepsilon}{R^2}\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2\right),$$

ε 为小正常数．令

$$w=\frac{v}{K}\pm[u(x,t)-\varphi(x^1,\cdots,x^{n-1},0,t)],$$

K 为待定常数．取 $K=K_\varepsilon$ 充分大使 $w\geqslant 0$ 于 $\partial Q_{R,T}$ 的 $0<t\leqslant T$ 部分．于 $\partial Q_{R,T}$ 的 $t=0$ 部分有：

$$\frac{\partial w}{\partial x_n}\geqslant\frac{K}{1+\frac{x_n}{R}+\frac{\varepsilon}{R^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2}\pm\varphi_{x_n}\geqslant\frac{K}{2+(n-1)\varepsilon}-|\varphi_{x_n}|\geqslant 0,$$

因此

$$w|_{\partial Q_{R,T}\cap(t=0)}\geqslant 0.$$

令

$$\mathscr{L}=\sum a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i-\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial t},$$

$$a_{ij}=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x,t,u,D_xu,\tau D_x^2u)d\tau,$$

则

$$\pm\mathscr{L}u\leqslant|F(x,t,u,D_xu,0)|\leqslant C(1+|D_xu|^2).$$

当 w 于 $Q_{R,T}$ 内取到最小，则于最小点 $w_x=0$，$\mathscr{L}w\geqslant 0$，但

$$\mathscr{L}w|_{w_x=0}\leqslant\frac{K}{R^3}\left[-\lambda\frac{1+4\varepsilon^2\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^2}{R^2}}{\left(1+\frac{x_n}{R}+\frac{\varepsilon}{R^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2\right)^2}+\frac{\Lambda n\varepsilon}{\left(1+\frac{x_n}{R}+\frac{\varepsilon}{R^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2\right)^2}+C\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_{x_i}\pm K\frac{v_{x_i}}{R}\right)^2\right]$$

$$\leqslant -\frac{K}{R^3}\frac{\lambda - \Lambda n(n+1)\varepsilon - C_1 R}{\left(1+\frac{x_n}{R}+\frac{\varepsilon}{R^2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^2} + C_2 < 0,$$

上式当取 ε 与 R 充分小时成立，因此 w 不能在 $Q_{R,T}$ 内取到最大值，即 $w \geqslant 0$ 于 $\bar{Q}_{R,T}$. 因而

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|_{x=0} \geqslant 0，由此得到 \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x=0} \leqslant \frac{K}{R^2}.$$

同法可估得，当 $|x_i| \leqslant R/2(1 \leqslant i \leqslant n-1)$，$x_n = 0$ 时，

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right| \leqslant \frac{K}{R^2}.$$

返回原坐标，应用有限覆盖，定理得证.

$D_x u$ 于 $\bar{Q}$ 的有界估计，证法类似于定理 3，仅有两点不同. 其一是略去因子 $d_{\bar{P}}$，d_P，即取 $d_{\bar{P}} = d_P = 1$. 其二是不能排斥

$$v(x, t) = \eta^2(x, t)|D_x u|^2 + \alpha M^2[u(x, t) - u(\bar{P})]^2$$

在 $\partial\Omega \times [0, T]$ 取到最大值的可能性. 当 $\alpha M_\beta^2 M^{-2\beta} < 1/8$ 而在 $\partial\Omega \times [0, T]$ 上 v 取到最大值时，有

$$\frac{M^2}{8} \leqslant \eta^2(P_0)|D_x u(P_0)|^2 \leqslant M_1^2,$$

其中 $|D_x u|_{\partial^* Q} \leqslant M_1$ 为常数是已知的. 因此这情况下 M 为有界.

在作 $D_x u$ 的 $C^{\alpha,\alpha/2}$ 估计之前，要证 $(\partial u/\partial N)|_{\partial\Omega\times[0,T]}$ 于 $\partial\Omega \times [0, T]$ 上满足 Hölder 条件. 因此需要若干引理如下.

记 $K_{R,T} = \{(x, t)|\,|x_i| < R(1 \leqslant i \leqslant n-1), 0 < x_n < R, 0 < t \leqslant T\}$. 于 $K_{R_0,T}$ 上考察线性蜕化抛物方程

$$\mathscr{L} v = x_n \sum a_{ij} v_{x_i x_j} + \sum b_i v_{x_i} + cv - x_n v_t.$$

设 $\mathscr{L}$ 的系数于 $K_{R_0,T}$ 内满足条件

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum a_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad 0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n, \tag{7}$$

$$|b_i| \leqslant \Lambda \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \quad -\Lambda \leqslant c \leqslant 0, \tag{8}$$

$$2a_{nn} - b_n + cx_n \leqslant 0, \tag{9}$$

记 $\{(x,t)|\,|x_i| < R(1 \leqslant i \leqslant n-1), 0 < x_n < R, -R^2 < t <$

$0\} = K_R$, $M(R) = \max\limits_{K_R} v$, $m(R) = \min\limits_{K_R} v$, $\omega(R) = M(R) - m(R)$.

引理 15 设 $\mathscr{L}$ 的系数于 K_R 上满足 (7), (8), (9). 当 $v \in C^{2,1}(K_R) \cap C(\bar{K}_R)$,

$$-C(1 + x_n^2|D_x v|^2) \leqslant \mathscr{L} v \leqslant 0, \quad 0 \leqslant v \leqslant M_0,$$

$$|\{(x, t) \in \tilde{K}_R | v(x, t) \geqslant 1\} \geqslant \beta |\tilde{K}_R|,$$

其中常数 $\beta \in (0, 1)$, $C \geqslant 1$, $M_0 > 0$, $\tilde{K}_R = K_R \cap \{t < -R^2/4\}$. 则存在常数 $R_1 > 0$ 与 $\gamma > 0$, 使当 $R < R_1$ 时

$$\inf_{K_{R/2}} v \geqslant \gamma,$$

R_1, γ 仅依赖于 n, λ, Λ, C, M_0 与 β.

证 取 η 适当小,使 $\eta < \min(1/6, \beta/3C_1)$, C_1 为将于下面取定的常数,且使

$$\Big|\Big\{(x, t) \in \tilde{K}_R \cap \Big\{|x_i| < (1 - \eta)R(1 \leqslant i \leqslant n - 1),$$

$$\frac{\eta}{2} R < x_n < \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) R,$$

$$\left(\frac{\eta}{2} - 1\right) R^2 < t < -\left(\frac{1}{4} + \frac{3\beta}{4}\right) R^2\Big\} \Big| v \geqslant 1\Big\}\Big| \geqslant \frac{\beta}{6} |\tilde{K}_R|,$$

因此, $|x_i| < (1 - \eta/2)R$ $(1 \leqslant i \leqslant n - 1)$, $\eta R/2 < x_n < (1-\eta/2)R$, $(\eta/2 - 1)R^2 < t < -(1/4 + 3\beta/4)R^2$ 中,至少有一点 (x^*, t^*) 使 $v(x^*, t^*) \geqslant 1$. 我们要证明 Harnack 不等式于区域 $|x_i| < (1 - \eta/2)R$ $(1 \leqslant i \leqslant n - 1)$, $\eta R/2 < x_n < (1 - \eta/2) \cdot R$, $(\eta/2 - 1)R^2 < t < 0$ 能成立,即要得出,存在 $\rho > 0$ 使当 $|x_i| \leqslant (1-\eta)R(1 \leqslant i \leqslant n - 1)$, $\eta R \leqslant x_n \leqslant (1 - \eta)R$, $-(1/4 + \beta/2)R^2 \leqslant t \leqslant 0$ 时, $v \geqslant \rho$. Harnack 不等式的证明仿前一章定理 6 进行,针对现在的情况,证明作如下改动.

那里的 $u(0, 0)$ 现为 $v(x^*, t^*) \geqslant 1$, 因此 $v(x^0, t^0) \geqslant v(x^*, t^*) \geqslant 1$. 当

$$\left|K_{(1-R_0)\eta R/4}(x^0, t^0) \cap \left\{\frac{2^{m-1}v(x^0, t^0) - v}{(2^{m-1} - 1/2)v(x^0, t^0)} \geqslant 1\right\}\right|$$

$$\geq \mu |K_{(1-R_0)\eta R/4}|$$

时，取

$$w = \left[1 - \exp\left\{-\frac{C}{\lambda}[2^{m-1}v[x^0, t^0] - v]\right\} + \frac{C^2 + C\Lambda M_0}{\lambda^2}\right.$$

$$\left.\cdot (x_n^0 - x_n + (1 - R_0)\eta R/4)\right] \Big/ \left[1 - \exp\left\{-\frac{C}{\lambda}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot (2^{m-1} - 1/2)v(x^0, t^0)\right\}\right]$$

则由于 $b_n \geq 2a_{nn} - |c| x_n \geq 2\lambda - \Lambda \dfrac{\lambda}{\Lambda} = \lambda$，当 $R \leq \lambda/\Lambda$ 时，因此我们有：

$$w \geq 0, \quad \mathscr{L} w \leq 0 \quad 于\ K_{(1-R0)\eta R/4}(x^0, t^0),$$

因此有：

$$w|_{B_{\frac{(1-R_0)\eta}{4}R}(x^0)\times\{t=t^0\}} \geq 1 - C_2(1 - \mu)^{1/2}.$$

$(x, t) = (x^0, t^0)$ 代入得

$$\left\{\exp\left[\frac{C}{\lambda}(2^{m-1} - 1/2)v(x^0, t^0)\right] - \exp\left[\frac{C}{\lambda}(2^{m-1} - 1)v(x^0, t^0)\right]\right.$$

$$\left. - \frac{C^2 + C\Lambda M_0}{\lambda^2}\frac{(1 - R_0)\eta}{4}R\right\} \Big/ \left\{1 - \exp\left[-\frac{C}{\lambda}(2^{m-1}\right.\right.$$

$$\left.\left. - 1/2)\, v\,(x^0, t^0)\right]\right\}$$

$$\leq C_2(1 - \mu)^{1/2}.$$

由于 $v(x^0, t^0) \geq 1$，故当 $R \leq R_1$，R_1 充分小及 μ 充分接近于 1 时为矛盾. 以下的证明与前一章定理 6 相同. 得证 Harnack 不等式成立.

于区域 Q_0: $\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_i^0)^2 \leq \dfrac{R^2}{9}$，$0 < x_n < \eta R$，$-(1/4 + \beta/2)R^2 < t < 0$ 中考察函数

$$z(x, t) = \rho\left[1 - \beta - 9\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(x_i - x_i^0)^2}{R^2} + \frac{C_1 x_n}{R}\right.$$

$$+\frac{4t}{(1+2\beta)R^2}-\frac{R\varepsilon}{x_n}\Bigg]$$

其中 ε 为小正数，x_i^0 满足 $|x_i^0|\leqslant R/2$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$，则

$$z\big|_{\partial Q_0\cap\{\sum_{1}^{n-1}(x_i-x_i^0)^2=R^2/9\}}\leqslant 0,$$

$$z\big|_{\partial Q_0\cap\{t=-(1/4+\beta/2)R^2\}}\leqslant 0,$$

$$z\big|_{\partial Q_0\cap\{x_n=\eta R\}}\leqslant \rho,$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}z=\rho\Bigg\{&-\frac{18}{R^2}\sum_{i=1}^{n-1}[x_na_{ii}+b_i(x_i-x_i^0)]\\&+\frac{b_nC_1}{R}-\frac{4x_n}{(1+2\beta)R^2}\Bigg\}+c\left(z+\frac{\rho\varepsilon R}{x_n}\right)\\&-\frac{\rho\varepsilon R}{x_n^2}(2a_{nn}-b_n+cx_n)\\ \geqslant\ &\rho\left[\frac{C_1}{R}(b_n+cx_n)-\frac{C_2}{R}\right]\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}C_2=\sup_{K_R}\Bigg\{&\frac{18}{R}\sum_{i=1}^{n-1}[x_na_{ii}+b_i(x_i-x_i^0)]+\frac{4x_n}{(1+2\beta)R}\\&+|c|(1-\beta)\Bigg\}.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}b_n+cx_n&\geqslant 2(a_{nn}-|c|x_n)\geqslant 2(\lambda-\Lambda x_n)\\&\geqslant 2\lambda(1-\eta)\geqslant\frac{5}{3}\lambda,\end{aligned}$$

故取 $C_1=C_2/\lambda$ 就得到

$$\mathscr{L}z>0.$$

因此 $z(x,t)-v(x,t)$ 不能在 Q_0 内取到正最大，结合 ∂^*Q_0 的情况，就得到于 Q_0 内有：

$$z(x,t)-v(x,t)\leqslant 0.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 得：

$$v(x,t) \geqslant \rho\left[1-\beta-9\sum_{1}^{n-1}\frac{(x_i-x_i^0)^2}{R^2}+\frac{C_1x_n}{R}\right.$$

$$\left.+\frac{4t}{(1+2\beta)R^2}\right]$$

故当 $-R^2/4\leqslant t<0$, $0\leqslant x_n\leqslant \eta R$, $\sum_{1}^{n-1}(x_i-x_i^0)^2\leqslant\frac{\beta(1-8\beta)}{36(1+2\beta)}$ $\left(\text{预取 } \beta<\frac{1}{8}\right)$时,有 $v\geqslant\frac{\beta(1-8\beta)}{4(1+2\beta)}\rho$. 因此有: $|x_i|\leqslant R/2(1\leqslant i\leqslant n-1)$, $0\leqslant x_n\leqslant R/2$, $-R^2/4\leqslant t\leqslant 0$ 时有:

$$v\geqslant\frac{\beta(1-8\beta)}{4(1+2\beta)}\rho.$$

引理得证.

引理 16 设当 $1\leqslant l\leqslant N$ 时有: $f_l\in C^1(\boldsymbol{R}^n)$, $f_l'>0$ 于 $\boldsymbol{R}^n$, $v_l\in C^{2,1}(K_{R_0})\cap C(\bar{K}_{R_0})$, $|v_l|\leqslant M_0$,

$$-K_1(1+x_n^2|Dv_l|^2)\leqslant \mathscr{L}v_l\leqslant K_2.$$

且存在 $\beta\in(0,1)$, $\delta_1>0$, $K_3>0$ 使得对于任意 P_1, $P_2\in K_{R_0}$ 有:

$$K_3\frac{d^\beta(P_1,P_2)}{R_0^\beta}\geqslant\delta_1\sum_{l=1}^{N}[f_l(v_l(P_2))-f_l(v_l(P_1))]_+$$

$$+\sum_{l=1}^{N}[f_l(v_l(P_2))-f_l(v_l(P_1))]_- \qquad (*)$$

则存在 β_1, C 使有:

$$\sum_{l=1}^{N}|v_l(P_2)-v_l(P_1)|\leqslant CR_0^{-\beta_1}d^{\beta_1}(P_1,P_2)(K_3+M_0),$$

$$\forall P_1,P_2\in K_R\cap\{x_n=0\},\quad (0<R<R_0),$$

其中 $0<\beta_1<\beta$, β, C 仅依赖于 n, N, λ, Λ, δ_1, K_1, K_2 及 f_l' 于 $[-M_0, M_0]$ 中的上、下界. 又 $N=1$ 时不需要 $(*)$ 式成立的条件.

证 不妨设 $K_2=0$, 否则以 $K_2x_n/\lambda+v_l(x,t)$ 代替 v_l 即可. 其它证明同前一章定理 7 与定理 8.

引理 17 记 $k_{R_0}=\{x||x_i|<R_0(1\leqslant i\leqslant n-1),\ 0<x_n<R_0\}$，$Q_{R_0,T}=k_{R_0}\times(0,T]$. 设于 $Q_{R_0,T}$ 中 $\mathscr{L}$ 满足 (7)，(8)(9)，$v\in C^{2,1}(Q_{R_0,T})\cap C(\bar{Q}_{R_0,T})$，$|v|\leqslant M_0$，$|\mathscr{L}v|\leqslant K_1(1+x_n^2|D_xv|^2)$. 当 $x\in\bar{k}_{R_0}$ 时，$v(x,0)=v_0(x)\in C^\alpha$，则当 $(x,t)\in Q_{R,T}\cap\{x_n=0\}$，$R\leqslant\min(R_0/2,\ \lambda/4\Lambda)$ 时有：

$$|v(x,t)-v_0(x)|\leqslant MR^{-\alpha}t^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}[1+\|v_0\|_{C^\alpha(\bar{k}_{R_0})}],$$

其中 M 仅与 $n,\lambda,\Lambda,K_1,M_0,R_0,T$ 有关.

证 仅考察 $x=0$ 的情况，一般情况经 x 坐标平移即可. 用 $v-v_0(0)$ 代替 v，故可令 $v_0(0)=0$. 令 $w=e^{K_1v/\lambda}-1$，则

$$\mathscr{L}w\geqslant e^{K_1v/\lambda}(\mathscr{L}v-cv+c+K_1|D_xv|^2)\geqslant -K_2.$$

于区域 $Q_{\varepsilon,T}$ 内考察函数

$$W=\varepsilon^\alpha+\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+\frac{\widetilde{C}t}{\varepsilon\delta}+\frac{\widetilde{C}}{\varepsilon\lambda}\int_{x_n}^{\varepsilon}\sigma(y)dy+\frac{\varepsilon_1}{x_n},$$

$\widetilde{C}$ 为正常数，$\varepsilon,\delta,\varepsilon_1$ 为小正数且 $\delta<\varepsilon$.

$$\sigma(y)=\begin{cases}1, & y\leqslant\delta,\\ \left(\dfrac{\delta}{y}\right)^{3/2}, & y>\delta.\end{cases}$$

则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(W)=&\frac{2}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}x_n+b_ix_i)-\frac{\widetilde{C}x_n}{\varepsilon\delta}\\&-\frac{\widetilde{C}}{\varepsilon\lambda}[a_{nn}x_n\sigma'(x_n)+b_n\sigma(x_n)]\\&+\frac{\varepsilon_1}{x_n^2}(2a_{nn}-b_n+cx_n)+c\left(W-\frac{\varepsilon_1}{x_n}\right)\end{aligned}$$

当 $x_n\leqslant\delta$ 时，

$$\mathscr{L}(W)\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+|b_i|)-\frac{\widetilde{C}}{\varepsilon}\frac{b_n}{\lambda}\leqslant-\frac{\widetilde{C}}{\varepsilon}.$$

这是因为当 ε 小时有：$b_n\geqslant 2a_{nn}-\Lambda\varepsilon\geqslant\frac{3}{2}a_{nn}\geqslant\frac{3}{2}\lambda$，故取 $\widetilde{C}$ 较大得到上式. 当 $x_n>\delta$ 时，

$$a_{nn}x_n\sigma'(x_n)+b_n\sigma(x_n)=\left(b_n-\frac{3}{2}a_{nn}\right)\left(\frac{\delta}{x_n}\right)^{3/2}\geqslant 0,$$

因此

$$\mathscr{L}(W)\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+|b_i|)-\frac{\widetilde{C}}{\varepsilon}\leqslant-\frac{\widetilde{C}}{2\varepsilon}.$$

记 $C=\sqrt{n}\,\|e^{K_1v_0/\lambda}\|_{C^\alpha}+e^{K_1M_0/\lambda}+K_1$，则

$$\mathscr{L}\left(W-\frac{w}{C}\right)\leqslant-\frac{\widetilde{C}}{2\varepsilon}+1<0,$$

因此 $W-w/C$ 不在 $Q_{\varepsilon,T}$ 内取到负最小值.

要证它在 $\partial^*Q_{\varepsilon T}$ 上非负. 在 $\partial^*Q_{\varepsilon T}$ 的 $x_n=0$ 上，由于 $W=\infty$，因此 $W-w/C\geqslant 0$. 在 $t=0$ 上由于 $w(0,0)=0$ 得 $|w(x,0)|\leqslant\|w\|_{C^\alpha}|x|^\alpha\leqslant\sqrt{n}\,\|e^{K_1v_0/\lambda}\|_{C^\alpha}\varepsilon^\alpha$，因此 $W-w/C\geqslant 0$. 在 $\partial^*Q_{\varepsilon,T}$ 的另一些侧面上更易得出 $W-w/C\geqslant 0$. 因此在 $\bar{Q}_{\varepsilon,T}$ 上均有 $W-w/C\geqslant 0$. 令 $\varepsilon_1\to 0$ 再令 $x=0$ 得:

$$w(0,t)\leqslant CW(0,t)=C\left[\varepsilon^\alpha+\frac{\widetilde{C}t}{\varepsilon\delta}+\frac{\widetilde{C}}{\varepsilon\lambda}\int_0^t\sigma(y)dy\right]$$

$$\leqslant C\left(\varepsilon^\alpha+\frac{\widetilde{C}t}{\varepsilon\delta}+\frac{3\widetilde{C}\delta}{\varepsilon\lambda}\right),$$

取 $\delta=t^{1/2}$，$\varepsilon=t^{1/2(1+\alpha)}$ 得到

$$w(0,t)\leqslant C_1t^{\alpha/2(1+\alpha)}\quad 当\ t\leqslant R^{2(1+\alpha)}\ 时成立.$$

因此

$$w(0,t)\leqslant C_2R^{-\alpha}t^{\alpha/2(1+\alpha)},\quad \forall 0<t\leqslant T\ 时均成立;$$

$$v(0,t)\leqslant C_3R^{-\alpha}t^{\alpha/2(1+\alpha)},\quad \forall 0<t<T\ 时成立.$$

类似地令 $w_1=1-e^{-K_1v/\lambda}$，可证

$$v(0,t)\geqslant -C_4R^{-\alpha}t^{\alpha/2(1+\alpha)}$$

引理证毕.

定理 18 设 $\partial\Omega\in C^2$. 当 $u\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$ 为 (1)、(2) 的解，且 $D_xu\in C(\bar{Q})$，$\varphi\in C^{2,1}(\partial^*Q)$，$|u|\leqslant M_0$，$|D_xu|\leqslant M_1$ 于 $\bar{Q}$，F 满足定理 2 的条件，则 $\partial u/\partial N\in C^{\alpha_1,\alpha_1/2}(\partial\Omega\times[0,T])$，且 α_1 与 $\partial u/\partial N$ 的 Hölder 系数仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\mu_1,M_0,M_1$，

α 与 diam Ω, φ 在 $\partial\Omega\times[0, T]$ 上 $C^{1+\alpha}$ 的系数与 $\partial\Omega$ 的二阶微商系数。

证 做坐标 x 的双方非奇异变换，把 $\partial\Omega$ 局部化直为 $x_n=0$ 上原点附近 $|x_i|<R_0(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 的部分，且 Ω 全在 $x_n>0$ 中。又设 $K_{R_0,T}=\{(x,t)\,|\,|x_i|<R_0\,(1\leqslant i\leqslant n-1),\ 0<x_n<R_0,\ 0<t\leqslant T\}\subset Q$. 不妨设 $u|_{K_{R_0,T}}=0$, 否则于 $K_{R_0,T}$ 中用 $u-\varphi$ 代替 u. (1) 写为

$$\mathscr{L}u=\sum a_{ij}u_{x_ix_j}-u_t=-F(x,t,u,D_xu,0).$$

令 $v=u/x_n$. 由于 $u|_{x_n=0}=0$, 故

$$v=\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_{n-1},\theta x_n,t),\quad(0<\theta<1),$$

$$v|_{x_n=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0},\quad v|_{t=0}\in C^\alpha\ 于\ K_{R_0,T}\cap\{t=0\}.$$

又

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{L}}v&=x_n\sum a_{ij}v_{x_ix_j}+\sum b_iv_{x_i}+cv-x_nv_t\\&=-F(x,t,u,D_xu,0),\end{aligned}$$

其中 $b_i=-2a_{in}(1\leqslant i\leqslant n)$, $c=0$.

$$|\tilde{\mathscr{L}}v|\leqslant\mu_1(1+x_n^2|D_xv|^2).$$

$\tilde{\mathscr{L}}v$ 满足 (7), (8), (9). 令 $w=e^{R_0\mu_1v/\lambda}$, 则有

$$-\mu_3(1+x_n^2|D_xw|^2)\leqslant\tilde{\mathscr{L}}w\leqslant\mu_2,$$

应用引理 16 得:

$$|w(P_2)-w(P_1)|\leqslant C\,d_{P_1P_2}^{-\beta_1}d^{\beta_1}(P_1,P_2),$$

$$\forall P_1,P_2\in K_{R,T}\cap\{x_n=0\},\ (R<R_0).$$

因此

$$|v(P_2)-v(P_1)|\leqslant C_1d_{P_1P_2}^{-\beta_1}d^{\beta_1}(P_1,P_2),$$
$$\forall P_1,P_2\in K_{R,T}\cap\{x_n=0\},\quad(R<R_0).$$

当 $x_1,x_2\in K_{R_0/2,T}\cap\{x_n=0\}$, 而 $\min(t_1,t_2)>d(P_1,P_2)$ 时则有:

$$|v(P_2)-v(P_1)|\leqslant C_2d^{\beta_1/2}(P_1,P_2),$$

$$\forall P_1, P_2 \in Q_{R_0/2,T} \cap \{x_n = 0\}.$$

当 $x^1, x^2 \in K_{R_0/2,T} \cap \{x_n = 0\}$ 而 $\min(t^1, t^2) = t^1 \leqslant d(P_1, P_2)$，则

$$t^2 = t^2 - t^1 + t^1 \leqslant d^2(P_1, P_2) + d(P_1, P_2) \leqslant 2d(P_1, P_2),$$

$$\text{只要 } d(P_1, P_2) \leqslant 1.$$

应用引理 17 得

$$\begin{aligned}|v(x^2, t^2) - v(x^1, t^1)| &\leqslant |v(x^2, t^2) - v(x^2, 0)| \\ &\quad + |v(x^1, t^1) - v(x^1, 0)| + |v(x^2, 0) - v(x^1, 0)| \\ &\leqslant C\frac{(t^1)^{\alpha/2(1+\alpha)} + (t^2)^{\alpha/2(1+\alpha)}}{R_0^\alpha} + C_1|x^2 - x^1|^\alpha \\ &\leqslant C_2 d^{\alpha/2(1+\alpha)}(P_1, P_2).\end{aligned}$$

合并上面二情况得：

$$|v(P_2) - v(P_1)| \leqslant C_3 d^\gamma(P_1, P_2),$$

$$P_1, P_2 \in K_{R_0/2,T} \cap \{x_n = 0\},$$

$\gamma = \min\left\{\frac{\beta_1}{2}, \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\right\}$. 由 $v|_{x_n=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}$，再用 $\partial\Omega \times [0, T]$ 的有限覆盖. 定理得证.

定理 19 在定理 18 的条件下有 $D_x u \in C^{\alpha_1, \alpha_1/2}(\bar{Q})$，$\alpha_1$ 与 Hölder 系数依赖情况与定理 18 一样.

证 记

$$\mathscr{L} = \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t},$$

$$v_{\pm l} = \pm u_{x_l} + \alpha \sum_{m=1}^n u_{x_m}^2 \quad (1 \leqslant l \leqslant n),$$

$\alpha \in (0, 1)$ 为常数. 则

$$\begin{aligned}\mathscr{L} v_{\pm l} &= \pm \mathscr{L} u_{x_l} + 2\alpha \sum u_{x_m} \mathscr{L} u_{x_m} + 2\alpha \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} u_{x_m x_i} u_{x_m x_j} \\ &= -\sum \frac{\partial F}{\partial p_i} v_{\pm l x_i} - \frac{\partial F}{\partial u}(\pm u_{x_l} + 2\alpha \sum u_{x_m}^2)\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x_l}-2\alpha\sum u_{x_m}\frac{\partial F}{\partial u_{x_m}}+2\alpha\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}u_{x_mx_i}u_{x_mx_j}$$

$$\geqslant -C(1+|r|)(|D_xv_{\pm l}|+1)+2\alpha\lambda|r|^2$$

$$\geqslant -\frac{C_1}{\alpha}(1+|D_xv_{\pm l}|^2),$$

应用引理 11，12 知对 $v_{\pm l}(1\leqslant l\leqslant n)$ 近边单边的 Hölder 估计成立. 又易得

$$\sum_{l=1}^{n}|u_{x_l}(P_2)-u_{x_l}(P_1)|\leqslant\sum_{l=1}^{n}\max\{[v_l(P_2)-v_l(P)_1]_+,$$

$$-[v_{-l}(P_2)-v_{-l}(P_1)]_-\}+2\alpha M_1\sum_{m=1}^{n}|u_{x_m}(P_2)-u_{x_m}(P_1)|,$$

其中 $M_1=\sup\limits_{\bar{Q}}|D_xu|$. 取 $\alpha=1/4M_1$ 就得到 $u_{x_l}(1\leqslant l\leqslant n)$ 的近边 Hölder 估计成立.

结合 D_xu 的内部 Hölder 估计结果 (定理 6)，仿定理 13 的证明得到 $D_xu\in C^{\alpha_1,\alpha_1/2}(\bar{Q})$. 定理证毕.

当 $\varphi\in C^{2,1}(\partial^*Q)$，$u_t\in C(\bar{Q})$ 时，$|u_t|$ 的全局有界估计类似于定理 6，仅是现在情况 $d_{\bar{P}}$，d_P 改为 1. 又出现所考察函数最大可在 ∂^*Q 上取到的情况，此情况下 $|u_t|$ 的有界估计亦不难作出.

定理 20 设 $u\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$ 为 (1)、(2) 的解，满足 $\varphi\in C^{2,1}(\partial^*Q)$，$D_{\tilde{x}}\varphi\in C^{2,1}(\partial^*Q)$，其中 $\tilde{x}$ 是沿 ∂Q 的切方向，$D_x^2u\in C(\bar{Q})$. $|u|\leqslant M_0$，$|D_xu|\leqslant M_1$ 于 $\bar{Q}$. 对 F 的条件同定理 4. 则

$$|D_x^2u|_{\partial^*Q}\leqslant C,$$

C 的依赖情况与定理 18 相同.

证 考察

$$v_{\pm l}=\pm(u_{x_l}-u_{x_l}|_{x_n=0})+\alpha\sum_{m=1}^{n-1}(u_{x_m}-u_{x_m}|_{x_n=0})^2$$

$$(1\leqslant l\leqslant n-1).$$

由于

$$\mathscr{L}v_{\pm l}\geqslant -C(1+|r|)(|D_xv_{\pm l}|+1)+\alpha\lambda\sum_{(i,j)\neq(n,n)}u_{x_ix_j}^2,$$

再由方程(1)得:

$$u_t = \sum a_{ij} u_{x_i x_j} + F(x, t, u, D_x u, 0),$$

结合 $|u_t|$ 全局有界导出

$$|u_{x_n x_n}| \leqslant C\Big[\sum_{(i,j)\neq(n,n)} |u_{x_i x_j}| + 1\Big],$$

故有:

$$u^2_{x_n x_n} \leqslant C_1\Big[\sum_{(i,j)\neq(n,n)} u^2_{x_i x_j} + 1\Big],$$

因此

$$\mathscr{L} v_{\pm l} \geqslant -C(1 + |r|)(|D_x v_{\pm l}| + 1) - \frac{\alpha\lambda}{2C_1}(|r|^2 - C_2)$$

$$\geqslant -\frac{C_3}{\alpha}(1 + |D_x v_{\pm l}|^2).$$

仿定理 14 作

$$W_{\pm l} = K\frac{v}{R} - (v_{\pm l} - v_{\pm l}|_{x_n=0}),$$

其中闸函数 v 与定理 14 相同. 而证得 $\left|\dfrac{\partial v_{\pm l}}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}$ $(1 \leqslant l \leqslant n - 1)$ 为有界. 再由

$$\sum_{l=1}^{n-1}\left|\frac{\partial u_{x_l}}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} \leqslant \sum_{l=1}^{n-1}\max\left\{\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_n}\right)_+ - \left(\frac{\partial v_{-l}}{\partial x_n}\right)_-\right\}_{x_n=0} + 2\alpha M_1 \sum_{m=1}^{n-1}\left|\frac{\partial u_{x_m}}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}$$

取 $\alpha = 1/4M_1$ 即得: $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1}\left|\frac{\partial u_l}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} \leqslant C$. 再由方程得到 $|u_{x_n x_n}|_{x_n=0}$ 为有界. 定理证毕.

§6 二阶微商的近边有界估计与 Hölder 条件估计

再作 $D_x^2 u$ 的全局上有界估计,其证法与定理 5 类似, 仅是现

在情况 d_P, d_P 改为 1，又出现所考察的函数最大亦可在 $\partial^* Q$ 上取到的情况，此情况下相应估计不难作出。由此得到 $|D_x^2 u|$ 的全局有界估计，$|D_x^2 u| \leqslant C$，$\forall (x, t) \in \bar{Q}$.

在 $\varphi \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\partial^* Q)$ 的假设下，$u_t \in C^{\alpha_1, \alpha_1/2}(\bar{Q})$ 的证明由定理 8 的内估计结合有界系数线性抛物方程的近边估计得出。这是重复引理 11，12，13 的简单情况。

关于 $D_x^2 u$ 的边界 Hölder 条件估计与全局 Hölder 条件估计有下列两定理。

定理 21 设 $\partial\Omega \in C^2$, $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ 为 (1), (2) 的解，且 $|u| \leqslant M_0$, $|D_x u| \leqslant M_1$, $|D_x^2 u| \leqslant M_2$ 于 $\bar{Q}$. $\varphi \in C^{2,1}(\partial^* Q)$, $D_{\tilde{x}} \varphi \in C^{2,1}(\partial^* Q)$($\tilde{x}$ 为 $\partial\Omega$ 的切方向)。对 F 的条件同定理 8，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial N \partial \tilde{x}_i} (1 \leqslant i \leqslant n-1), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} \in C^{\alpha_1, \alpha_1/2}(\partial^* Q),$$

且 α_1 与 Hölder 条件的系数仅依赖于 n, λ, Λ, M_0, M_1, M_2, μ_6, diam Q 及 $\partial\Omega$ 的 C^2 系数。

证 作 x 的双方非奇变换使 $\partial\Omega$ 的一部分化到 $x_n = 0$ 上而 $\Omega \subset \{x_n > 0\}$.

记 $v_l = \dfrac{\partial u}{\partial x_l}$, 则

$$\mathscr{L} v_l = \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} v_{l x_i x_j} - v_{lt} = -\sum \frac{\partial F}{\partial p_i} u_{x_l x_i}$$

$$- \frac{\partial F}{\partial u} u_{x_l} - \frac{\partial F}{\partial x_l}, \quad (1 \leqslant l \leqslant n-1).$$

记 $w_l = \dfrac{v_l - v_l|_{x_n=0}}{x_n}$, 则 w_l 满足

$$\tilde{\mathscr{L}} w_l = x_n \sum \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} w_{l x_i x_j} + 2\sum \frac{\partial F}{\partial r_{in}} w_{l x_i} - x_n \mathscr{L} v_l,$$

$$w_l|_{x_n=0} = 0, \quad |\tilde{\mathscr{L}} w_l| \leqslant K_3.$$

由 w_l 与 $w_{l+n-1} = -w_l (1 \leqslant l \leqslant n-1)$, 应用与定理 20 类似的推导得到，当 $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$ 而 $(i, j) \neq (n, n)$ 时，$u_{x_i x_j}|_{x_n=0}$ 满

足 Hölder 条件，$u_{x_n x_n}|_{x_n=0}$ 满足 Hölder 条件由方程得出．定理得证．

定理 22 设 $\partial\Omega\in C^2$，$u\in C^{2,1}(\bar{Q})$ 为 (1)，(2) 的解，且 $|u|\leqslant M_0$，$|D_xu|\leqslant M_1$，$|D_x^2u|\leqslant M_2$ 于 $\bar{Q}$，$\varphi\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\partial^*Q)$，$D_{\tilde{x}}\varphi\in C^{2,1}(\partial^*Q)$，($\tilde{x}$ 为 $\partial\Omega$ 的切向)．对 F 的条件同定理 10，则有

$$D_x^2u\in C^{\alpha_1,\alpha_1/2}(\bar{Q}),$$

其中 α_1 与 Hölder 系数仅依赖于 n，λ，Λ，M_0，M_1，M_2，μ_7，$M_{t\beta}$，β，φ 的 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\partial^*Q)$ 的指数、系数，$\operatorname{diam}\Omega$ 及 $\partial\Omega\in C^2$ 的二阶微商系数．

证 考察定理 10 中使用过的函数

$$v_k=u_{(\gamma_k)(\gamma_k)}+\varepsilon\sum_{l=1}^{N}[M_2+u_{(\gamma_l)(\gamma_l)}]^2.$$

它满足

$$\mathscr{L}v_k\geqslant -C_\varepsilon-\sum\frac{\partial F}{\partial p_i}v_{kx_i}\geqslant -\widetilde{C}_\varepsilon(1+|D_xv_k|^2)$$
$$(1\leqslant k\leqslant N),$$

其中

$$\mathscr{L}=\sum\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial t}.$$

应用引理 11 得到

$$[v_k(x,t)-v_k(x,0)]_+\leqslant Cd_x^{-\beta}t^{\beta_1},\quad (1\leqslant k\leqslant N).\tag{10}$$

定理 10 已导出

$$\delta\sum_{k=1}^{N}[v_k(P_2)-v_k(P_1)]_++\sum_{k=1}^{N}[v_k(P_2)-v_k(P_1)]_-$$
$$\leqslant Cd^{\beta_1}(P_1,P_2),$$

上式中右端原有的因子 $d_{P_1P_2}^{-\beta}$ 去掉，是因为现在对 u_{x_i}，u_t 用的是全局 Hölder 条件估计．上式中取 $P_1=(x,0)$，$P_2=(x,t)$，结合 (10) 得：

$$\delta\sum_{k=1}^{N}[v_k(x,0)-v_k(x,t)]_+\leqslant Kd^{\beta_1}(P_1,P_2)$$

$$+\sum_{k=1}^{N}[v_k(x,t)-v_k(x,0)]\leqslant C_1 d_x^{-\beta}t^{\beta_1}.$$

再结合 (10) 得:

$$|v_k(x,t)-v_k(x,0)|\leqslant C_2 d_x^{-\beta}t^{\beta_1},\quad (1\leqslant k\leqslant N).$$

应用定理 12 并作类似推导得:

$$|v_k(x,t)-v_k(x,t)|_{x_n=0}|\leqslant C\left(\frac{x_n}{R}\right)^{\beta_1},$$

$$x_n>0,\quad |x|<R/2,\quad t^\circ+\frac{R^2}{2}\leqslant t\leqslant t^\circ+R^2,$$

$$|v_k(x,t)-v_k(x,t)|_{x_n=t=0}|\leqslant C\left(\frac{x_n^2+t}{R^2}\right)^{\beta_1/2},$$

$$x_n>0,\quad |x|<R/2,\quad t\leqslant R^2.$$

因此仿定理 13 的推导得:

$$(1-NC\varepsilon)|u_{(\tau_k)(\tau_k)}(P_2)-u_{(\tau_k)(\tau_k)}(P_1)|\leqslant|v_k(P_2)-v_k(P_1)|$$
$$\leqslant Cd^\gamma(P_1,P_2),\quad (1\leqslant k\leqslant N).$$

由此导出

$$|D_x^2u(P_2)-D_x^2u(P_1)|\leqslant Cd^\gamma(P_1,P_2).$$

定理证毕.

§7 自然结构条件下第一边值问题解的存在性与唯一性

第一边值问题 (1)、(2) 在 $\partial\Omega$, φ 与方程系数相当光滑时，可证解为存在、唯一. 写为定理如下:

定理 23 设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界区域, $\partial\Omega\in C^{4+\alpha}(\alpha>0)$, $Q=\Omega\times(0,T]$, $\varphi\in C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\partial^*Q)$. $F(x,t,z,p,r)$ 当 $(x,t)\in\bar{Q}$, $|z|\leqslant M_0+\varepsilon$, $|p|\leqslant M_1+\varepsilon$, $|r|\leqslant M_2+\varepsilon$ 时对 x,z,p,r 为 $C^{2+\alpha}$, 对 t 为 $C^{1+\alpha}$, 且设 Hölder 系数与变量无关,其中 M_0, M_1, M_2 由各先验估计定出,而 ε 为任何正数. 又满足条件:

$$\lambda|\xi|^2\leqslant\sum F_{r_{ij}}\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2,\quad \forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,$$

$\forall x,\ t,\ z,\ p,\ r\in Q\times \boldsymbol{R}^{n+1}\times \$^n$;

$zF(x,\ t,\ z,\ 0,\ 0)\leqslant \mu_1 z^2+\mu_2,\quad \forall x,\ t,\ z\in Q\times \boldsymbol{R}$;

$|F(x,\ t,\ z,\ p,\ 0)|\leqslant \mu_3(1+|p|^2)$,

$\forall x,\ t,\ z,\ p\in Q\times\{|z|\leqslant M_0+\varepsilon\}\times \boldsymbol{R}^n$;

$|F|+|F_z|+|F_p|(1+|p|)+|F_x|(1+|p|)^{-1}$

$\leqslant \mu_4(1+|p|^2+|r|)$,

$\forall x,t,z,p,r\in Q\times\{|z|\leqslant M_0+\varepsilon\}\times \boldsymbol{R}^n\times \$^n$;

$|F_t|\leqslant \mu_5(1+|r|^2)$,

$\forall x,t,z,p,r\in Q\times\{|z|$

$\leqslant M_0+\varepsilon\}\times\{|p|\leqslant M_1+\varepsilon\}\times \$^n$;

$F_{(\xi)(\xi)}\leqslant \mu_6\{(1+\sum|u_{ij}|^2)^{3/2}(|\tilde{x}|^2+|\tilde{u}|^2)$

$+(1+\sum|u_{ij}|)\sum|\tilde{u}_i|^2+[(1+\sum|u_{ij}|)$

$\times(|\tilde{x}|+|\tilde{u}|+\sum|\tilde{u}_i|]\sum|\tilde{u}_{ij}|\}$,

$\forall(x,t,z,p,r)\in Q\times\{|z|\leqslant M_0+\varepsilon\}\times\{|p|$

$\leqslant M_1+\varepsilon\}\times \$^n$;

$(\tilde{x},\ \tilde{u},\ \tilde{u}_i,\ \tilde{u}_{ij})\in \boldsymbol{R}^{2n+1}\times \$^n$;

$\varphi_t=F(x,\ t,\ \varphi,\ \varphi_{x_i},\ \varphi_{x_ix_j})$,

$\varphi_{tt}=F_t+F_zF+\sum F_{p_i}F_{x_i}+\sum F_{r_{ij}}F_{x_ix_j}$

于 $x\in\partial\Omega,\ t=0$.

则解 u 于函数类 $C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\bar{Q})$ 中为存在唯一.

注 $\partial\Omega\in C^{4+\alpha}$ 是必需的，否则 $\varphi\in C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\partial^*Q)$ 成为无意义. 又 $x\in\partial\Omega$，$t=0$ 上的两个条件是使 $u\in C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(\bar{Q})$ 成立的必需条件. 这由线性抛物方程

$$\begin{cases}Lu=\sum a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum b_iu_{x_i}+cu-u_t=f,\\ u|_{\partial^*Q}=\phi\end{cases}$$

解为 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q})$ 的必需连接条件 $L\phi=f$ 于 $x\in\partial\Omega$，$t=0$ 应用于 u 与 u_t 而得出.

证 $u-\varphi$ 改记为 u，则边值条件化为 $u|_{\partial^*Q}=0$. 连接条件化为 $F(x,0,0,0,0)=0$，$F_t(x,0,0,0,0)=0$，$x\in\partial\Omega$.

用参数延拓法来证解为存在. 作

$$\begin{cases}u_t = (1-\kappa)\Delta u + \kappa F(x, t, u, u_{x_i}, u_{x_ix_j}), \ (x, t)\in Q, & (11)\\ u|_{\partial^* Q} = 0, & (12)\end{cases}$$

$\kappa\in[0, 1]$. 设 I 为使 (11), (12) 有解的 u^κ 使 $u^\kappa\in C^{4+\alpha}$ (C^α 是 $C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})$ 的简记)的 κ 的集合. 显然 $0\in I$, 要证于 $[0, 1]$ 中 I 为闭又为开.

证 I 为闭的预备工作, 是我们过去的先验估计. 用于 (11)、(12) 得到,当 $u^\kappa\in C^{4+\alpha}$ 时, $u^\kappa\in C^{2+\alpha_1}$, 且指数 α_1 及其 Hölder 系数均与 κ 无关, 由此 F_{uu}, F_{up_i}, $F_{p_ip_j}$, $F_{ux_i}, \cdots$, $F_{x_ix_j}$, $F_t\in C^{\alpha\alpha_1}$, 且 Hölder 系数与 κ 无关. (1) 求导, 再应用 Schauder 估计得 $u\in C^{4+\alpha\alpha_1}$ 且 Hölder 系数与 κ 无关. 导出 $F_{uu}, F_{up_i}, \cdots$, $F_{x_ix_j}$, $F_t\in C^\alpha$, 再应用 Schauder 估计得 $u\in C^{4+\alpha}$, Hölder 系数与 κ 无关.

由此对应于 (11), (12) 的解列 $\{u^{\kappa_i}\}$ 当 $\kappa_i\to\kappa(i\to\infty)$ 时, 极限函数 $u^\kappa\in C^{4+\alpha}$ 也是 (11)、(12) 的解,即 I 为闭.

再证 I 为开. 设 $\kappa_0\in I$, 记 $u^{\kappa_0} = u^0$, 由下式定出映象 $\Psi_\kappa w = v$

$$\begin{cases}v_t = (1-\kappa)\triangle v + \kappa(\sum a_{ij}v_{x_ix_j} + \sum b_i v_{x_i} + cv)\\ \qquad + \kappa[F(x, t, w, w_{x_i}, w_{x_ix_j}) - \sum a_{ij}w_{x_ix_j}\\ \qquad - \sum b_i w_{x_i} - cw], \quad (x,t)\in Q, & (13)\\ v|_{\partial^* Q} = 0,\end{cases}$$

其中 $(a_{ij}, b_i, c) = (F_{r_{ij}}, F_{p_i}, F_z)(x, t, u^0, u^0_{x_i}, u^0_{x_ix_j})$, 映象 Ψ_κ 的不动点就是 (11)、(12) 的解. 今证在空间 $C^{2+\alpha}$ 的集合

$$S_\delta = \{w \,|\, \|w - u^0\|_{C^{2+\alpha}} \leqslant \delta\}$$

上,当 δ 适当小时, (13) 为压缩映象.

首先证映象 Ψ_κ 为存在唯一. 当 δ 小时, $|w|\leqslant M_0 + \varepsilon$, $|D_x w|\leqslant M_1 + \varepsilon$, $|D_x^2 w|\leqslant M_2 + \varepsilon$, $\forall(x, t)\in Q$, 因此 a_{ij}, b_i, $c\in C^\alpha$, (13) 中方括号 [ ] 内 $\in C^\alpha$, 由线性抛物方程第一边值问题解的性质得 $v\in C^{2+\alpha}$, 即映象 Ψ_κ 为存在、唯一.

再要证明当 κ 充分接近 κ_0 时, Ψ_κ 于 $C^{2+\alpha}$ 范数下为压缩映象.

(13) 与 $u_t^0=(1-\kappa_0)\triangle u^0+\kappa_0 F(x,t,u^0,u_{x_i}^0,u_{x_ix_j}^0)$ 相减得:

$$(v-u^0)_t=(1-\kappa)\Delta(v-u^0)+\kappa_0[\sum a_{ij}(v-u^0)_{x_ix_j}$$
$$+b_i(v-u^0)_{x_i}+c(v-u^0)]+\kappa G+(\kappa_0-\kappa)H,$$

其中 $H=\Delta u^0-F(x,t,u^0,u_{x_i}^0,u_{x_ix_j}^0)$, 易得 $\|H\|_{C^\alpha}\leqslant M_5$,

$$G=F(x,t,w,w_{x_i},w_{x_ix_j})-F(x,t,u^0,u_{x_i}^0,u_{x_ix_j}^0)$$
$$-\sum a_{ij}(w-u^0)_{x_ix_j}-\sum b_i(w-u^0)_{x_i}-c(w-u^0),$$

把 $(w,w_{x_i},w_{x_ix_j})$ 记为向量 W, $(u^0,u_{x_i}^0,u_{x_ix_j}^0)$ 记为向量 W^0,

$$|G(x,t,W^2)-G(x,t,W^1)|$$
$$=|(W^2-W^1)\int_0^1\operatorname{grad}G(x,t,\theta W^2+(1-\theta)W^1)d\theta|$$
$$\leqslant|W^2-W^1|\max\{|W^2-W^0|,\ |W^1-W^0|\},\ (0<\theta<1).$$

记 $\rho=(|x-\tilde{x}|^2+|t-\tilde{t}|)^{1/2}$, $\widetilde{W}=W(\tilde{x},\tilde{t})$, 则

$$|[G(x,t,W^2)-G(x,t,W^1)]-[G(\tilde{x},\tilde{t},\widetilde{W}^2)-G(\tilde{x},\tilde{t},\widetilde{W}^1)]|$$
$$\leqslant|G(x,t,W^2)-G(x,t,W^1)|+|G(\tilde{x},\tilde{t},\widetilde{W}^2)-G(\tilde{x},\tilde{t},\widetilde{W}^1)|$$
$$\leqslant\|W^2-W^1\|_{C^\alpha}\frac{1}{\rho^\alpha}\max(\|W^2-W^0\|_C,\|W^1-W^0\|_C).$$

又

$$|[G(x,t,W^2)-G(x,t,W^1)]-[G(\tilde{x},\tilde{t},\widetilde{W}^2)-G(\tilde{x},\tilde{t},\widetilde{W}^1)]|$$
$$\leqslant|G(x,t,W^2)-G(x,t,W^1)-G(x,t,\widetilde{W}^2)+G(x,t,\widetilde{W}^1)|$$
$$+|G(x,t,\widetilde{W}^2)-G(x,t,\widetilde{W}^1)-G(\tilde{x},\tilde{t},\widetilde{W}^2)+G(\tilde{x},\tilde{t},\widetilde{W}^1)|$$
$$\leqslant|(W^2-\widetilde{W}^2-W^1+\widetilde{W}^1)\int_0^1\operatorname{grad}G(x,t,\theta W^2+(1-\theta)\widetilde{W}^2)d\theta|$$
$$+|(W^1-\widetilde{W}^1)\int_0^1\operatorname{grad}[G(x,t,\theta W^2+(1-\theta)\widetilde{W}^2)$$
$$-G(x,t,\theta W^1+(1-\theta)\widetilde{W}^1)]d\theta|+|(\widetilde{W}^2-\widetilde{W}^1)$$
$$\cdot\int_0^1\operatorname{grad}[G(x,t,\theta\widetilde{W}^2+(1-\theta)\widetilde{W}^1)$$
$$-G(\tilde{x},\tilde{t},\theta\widetilde{W}^2+(1-\theta)\widetilde{W}^1)]d\theta|$$

把 $W^1-\widetilde{W}^1$ 写成 $W^1-W^0-(\widetilde{W}^1-\widetilde{W}^0)+W^0-\widetilde{W}^0$, 得到,上式右端

$$\leqslant C\{\|W^2 - W^1\|_{C^\alpha}\rho^\alpha\|W^2 - W^0\|_C + (\|W^1 - W^0\|_{C^\alpha}\rho^\alpha + \rho)$$
$$\cdot \|W^2 - W^1\|_C + \|W^2 - W^1\|_C\rho^\alpha \max(\|W^2 - W^0\|_C,$$
$$\|W^1 - W^0\|_C)\}$$
$$\leqslant C\|W^2 - W^1\|_{C^\alpha}\rho^\alpha[\max(\|W^2 - W^0\|_C, \|W^1 - W^0\|_C) + \rho^{1-\alpha}]$$

由此得到

$$\|G(x, t, W^2) - G(x, t, W^1)\|_{C^\alpha}/\|W^2 - W^1\|_{C^\alpha}$$
$$\leqslant C_2 \min\left\{\frac{1}{\rho^\alpha}\max(\|W^2 - W^0\|_C, \|W^1 - W^0\|_C),\right.$$
$$\left.\max(\|W^2 - W^0\|_C, \|W^1 - W^0\|_C + \rho^{1-\alpha}\right\}$$
$$\leqslant C_3 \max(\|W^2 - W^0\|_C, \|W^1 - W^0\|_C)^{1-\alpha},$$

由于 $G(x, t, W^0) = 0$，$\|W\|_{C^\alpha} = \|w\|_{C^{2+\alpha}}$，取 $\|w - w^0\|_{C^{2+\alpha}} \leqslant \delta$ 得:

$$\|\kappa G(x, t, W) + (\kappa_0 - \kappa)H\|_{C^\alpha}$$
$$\leqslant (C_3\delta^{1-\alpha} + |\kappa - \kappa_0|M_3)\|W - W^0\|_{C^\alpha}$$
$$\leqslant (C_3 + M_3)\delta^{1-\alpha}\|w - u^0\|_{C^{2+\alpha}},$$

上式当取 $|\kappa - \kappa_0| \leqslant \delta^{1-\alpha}$ 时成立．因此由线性抛物方程解的估计得:

$$\|v - u^0\|_{C^{2+\alpha}} \leqslant K_1(C_3 + M_3)\delta^{1-\alpha}\|w - u^0\|_{C^{2+\alpha}}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|w - u^0\|_{C^{2+\alpha}} \leqslant \frac{\delta}{2},$$

当取 δ 使 $K_1(C_3 + M_3)\delta^{1-\alpha} = 1/2$，且 $\|w - u^0\|_{C^{2+\alpha}} \leqslant \delta$ 时上式成立．又

$$\|v^2 - v^1\|_{C^{2+\alpha}} \leqslant K_1\kappa\|G(x, t, W^2) - G(x, t, W^1)\|_{C^\alpha}$$
$$\leqslant K_1C_3\delta^{1-\alpha}\|W^2 - W^1\|_{C^\alpha} \leqslant \frac{1}{2}\|u^2 - u^1\|_{C^{2+\alpha}},$$

因而 $|\kappa - \kappa_0| \leqslant \delta^{1-\alpha}$ 时，Ψ_κ 于 $C^{2+\alpha}$ 为压缩映象得证．因此 I 为开．I 既为闭又为开，因而 $I = [0, 1]$.

这证明了(11)，(12)的解为存在．至于解的唯一性易证，且可在更大的空间中证解为唯一．定理证毕．

减弱定理 23 中区域边界，初、边值光滑性及 F 的光滑性，以及连接条件的去掉（解的意义相应地也弱一些），这些讨论尚需花一些力气，但不是原则上为新颖的材料，此处从略，可参考有关文献[44],[45]。

尚需考虑的问题是，Neumann 边界问题，凸性条件的减弱，以及本章结果的应用等。

第十章　完全非线性抛物型方程(续)

下面将推广密度定理于下述拟线性抛物型方程的情况，从而得到具第二种自然结构条件完全非线性抛物方程第一边值问题解的存在、唯一性[46],[47].

设 Ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界区域，$T>0$，$Q=\Omega\times(0,T]$。于 Q 中考察方程

$$\begin{aligned}\mathscr{L}u&=\sum A_{ij}(x,t,u,u_x)u_{x_ix_j}-u_t\\&=B(x,t,u,u_x),\end{aligned}$$

其中 $A_{ij}(x,t,u,p)$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$, $B(x,t,u,p)$ 为$(x,t)\in\bar{Q}$, $u\in[-M,M]$, $p\in\boldsymbol{R}^n$ 的连续函数. 满足

$$\nu(1+|p|^{\sigma-2})|\xi|^2\leqslant\sum A_{ij}(x,t,u,p)\xi_i\xi_j\leqslant\mu(1+|p|^{\sigma-2})|\xi|^2, \tag{1}$$

$$|B(x,t,u,p)|\leqslant\mu(1+|p|^{\sigma}) \tag{2}$$

$\forall\xi\in\boldsymbol{R}^n$, $(x,t)\in Q$, $u\in[-M,M]$, $p\in\boldsymbol{R}^n$, 其中 μ, ν, σ 为正常数且 $\sigma>2$，这是因为$\sigma=2$的情况已于前章作了讨论.

设 $\partial\Omega\in C^2$, $u\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$,

$$u|_{\partial^*Q}=u^*,$$

其中 $\partial^*Q=\partial\Omega\times[0,T]\cup\Omega\times\{t=0\}$ 为Q的抛物边界，$u^*\in C^{\beta,\beta/\sigma}(\partial^*Q)$, $0<\beta\leqslant1$. 满足(1),(2)的 $\mathscr{L}u=B$ 称为具第二种自然结构条件的拟线性抛物方程，此中在 $2<\sigma<3$ 的部分情况下可对u导出密度定理，从而于 $\bar{Q}$ 得到u的 Hölder 条件估计.

不同的常数分别记为 C_1, C_2, $\cdots$ 与 c_1, c_2, $\cdots$.

§1 拟线性抛物方程具第二种自然结构条件下的密度定理

导出密度定理先要得出类似于前一章的诸引理. 但与 $\sigma=2$ 情况很不相同之处是, $2<\sigma<3$ 时密度定理及若干引理的成立, 需 u 的初值在适当范围内.

下面引理 1, 2 对任何 $\sigma>2$ 时成立.

引理 1 设 $X_1>0$, $t_1<t_2$. 设于柱体 $\{|x|\leqslant X_1\}\times\{t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$ 中有 $u\in C^{2,1}$, $u\geqslant 0$, $\mathscr{L}u\leqslant 0$ 且 $\inf\limits_{|x|\leqslant X_1, t=t_1} u\geqslant u_0>0$, 则存在常数 C_1, C_2, C_3 仅依赖于 n, μ, ν, σ (其中 $\sigma>2$), 又参量 $\Lambda\geqslant 1$, 使当

$$\frac{u_0^{\sigma-2}(t_2-t_1)}{X_1^\sigma}\leqslant C_1\Lambda,$$

$$X_1\leqslant C_2\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}u_0$$

时有:

$$\inf_{|x|\leqslant\frac{2}{3}X_1, t=t_2} u\geqslant C_3\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}u_0.$$

证 令

$$v=v_0\left(1-\frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{1+\delta}\frac{2t_2-t_1-t}{2(t_2-t_1)},$$

其中 $0<v_0\leqslant u_0$, $\delta>0$. 令 $w=u-v$, 当 $|x|=X_1$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 时有 $w=u\geqslant 0$. 当 $t=t_1$, $|x|\leqslant X_1$ 时有

$$w=u-v_0\left(1-\frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{1+\delta}\geqslant u_0-v_0>0.$$

当 w 于柱体 $\{|x|<X_1\}\times\{t_1<t\leqslant t_2\}$ 中取到最小值时, 则于取最小值的点有 $w_{x_i}=0(1\leqslant i\leqslant n)$, $\mathscr{L}(w)\geqslant 0$. 因此

$$0 \geqslant \mathscr{L}(u) \geqslant \mathscr{L}(v)|_{u_{x_i}=v_{x_i}} = \sum A_{ij}(x, t, u, v_{x_i}) - v_t,$$

上式右端的算子是 $\mathscr{L}$ 的线性化算子，由于不致引起混淆，可仍记为 $\mathscr{L}v$。应用(1)得

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(v) \geqslant v_0 \Bigg\{ \Bigg[& 4\delta(1+\delta)\nu\left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{\delta-1} \frac{2t_2 - t_1 - t}{2(t_2 - t_1)} \frac{|x|^2}{X_1^4} \\
& - 2n\mu(1+\delta)\left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{\delta} \frac{2t_2 - t_1 - t}{2(t_2 - t_1)} \frac{1}{X_1^2} \Bigg] \\
& \cdot (1 + |v_x|^{\sigma-2}) + \left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{1+\delta} \frac{1}{2(t_2 - t_1)} \Bigg\} \\
= v_0 \Bigg\{ & 2(1+\delta)\frac{1 + |v_x|^{\sigma-2}}{X_1^2} \frac{2t_2 - t_1 - t}{2(t_2 - t_1)} \left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{\delta-1} \\
& \cdot \left[(2\delta\nu + n\mu) \frac{|x|^2}{X_1^2} - n\mu\right] + \left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{1+\delta} \frac{1}{2(t_2 - t_1)} \Bigg\},
\end{aligned} \tag{3}$$

当 $\dfrac{|x|^2}{X_1^2} \geqslant \dfrac{n\mu}{n\mu + 2\delta\nu}$ 时有 $\mathscr{L}v > 0$，这与 $\mathscr{L}v \leqslant 0$ 矛盾. 当 $\dfrac{|x|^2}{X_1^2} < \dfrac{n\mu}{n\mu + 2\delta\nu}$ 时有 $1 - \dfrac{|x|^2}{X_1^2} \geqslant \dfrac{2\delta\nu}{n\mu + 2\delta\nu}$. 取 $\delta = \dfrac{1}{\sigma - 2}$ 有:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}v \geqslant v_0 \Bigg\{ & \left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{1+\delta} \frac{1}{2(t_2 - t_1)} - 2n\mu(1+\delta)\left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{\delta} \\
& \cdot \frac{1}{X_1^2} \left\{ 1 + \left[2(1+\delta)v_0\left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{\delta} \frac{|x|}{X_1^2}\right]^{\sigma-2} \right\} \Bigg\} \\
\geqslant v_0 & \left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{\delta} \Bigg\{ \left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right) \Bigg[\frac{1}{4(t_2 - t_1)} \\
& - n\mu(2(1+\delta))^{\sigma-1} v_0^{\sigma-2} \left(\frac{n\mu}{n\mu + 2\delta\nu}\right)^{\sigma/2-1} \frac{1}{X_1^{\sigma}} \Bigg] \\
& + \frac{2\delta\nu}{n\mu + 2\delta\nu} \frac{1}{4(t_2 - t_1)} - \frac{2n\mu(1+\delta)}{X_1^2} \Bigg\} > 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

上式在下面两条件下成立:

$$t_2 - t_1 \leqslant \frac{1}{4n\mu(2(1+\delta))^{\sigma-1}}\left(\frac{n\mu+2\delta\nu}{n\mu}\right)^{\sigma/2-1} v_0^{2-\sigma} X_1^{\sigma}$$

$$\equiv c_1 v_0^{2-\sigma} X_1^{\sigma}, \tag{5}$$

$$X_1 < \left[\frac{\delta\nu}{4n\mu(1+\delta)(n\mu+2\delta\nu)c_1}\right]^{\frac{1}{\sigma-2}} v_0 \equiv c_2 v_0. \tag{6}$$

故当 (5), (6) 成立时, (4) 与 $\mathscr{L}v \leqslant 0$ 矛盾. 即 w 于 $\{|x| \leqslant X_1\} \times \{t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$ 不取最小值. 因此当 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 时,

$$u \geqslant v_0\left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{1+\delta} \frac{2t_2 - t_1 - t}{2(t_2 - t_1)} \geqslant \frac{v_0}{2}\left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{1+\delta}. \tag{7}$$

取 $\left(\frac{u_0}{v_0}\right)^{\sigma-2} = \Lambda$, $c_1 = C_1, c_2 = C_2$, $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{9}\right)^{(\sigma-1)/(\sigma-2)} = C_3$, 引理得证.

引理 2 设于柱体 $\{x \mid |x| \leqslant C_4 X_2\} \times \{t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$, 其中 $0 < X_1 \leqslant X_2$, $t_1 < t_2$, $C_4 = C_4(n, \mu, \nu, \sigma) > 1$ 有 $u \in C^{2,1}$, $u \geqslant 0$, $\mathscr{L}u \leqslant 0$, $\inf\limits_{|x| \leqslant X_1, t=t_1} u \geqslant u_0 > 0$, 则存在常数 C_5, C_6, C_7, C_8 仅依赖于 n, μ, ν, σ, 又参量 $\Lambda \geqslant 1$, 使当

$$C_5 \leqslant \frac{u_0^{\sigma-2}(t_2 - t_1)}{X_2^{\sigma}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{C_6(\sigma-2)}} \leqslant C_5\Lambda,$$

$$X_3 \leqslant C_7 \Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{C_6} u_0$$

时有

$$\inf_{|x| \leqslant X_2, t=t_2} u \geqslant C_8 \Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{C_6} u_0.$$

证 设 $t_3 \leqslant t_2$, 则由 (5), (6) 得到, 当 $X_1 < c_2 v_0$ 时有:

$$t_3 - t_1 \leqslant C_1 v_0^{2-\sigma} X_1^{\sigma}.$$

令

$$v = \tilde{v}_0\left[1 - F^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t_3 - t_1}{t - t_1}\right)^{\frac{1}{\sigma-2}}\right],$$

$$F = \frac{x_1 - (1-\varepsilon)X_1}{2\varepsilon X_1} + \frac{\beta}{\varepsilon^2 X_1^2}\sum_{i=2}^{n} x_i^2,$$

其中 $\tilde{v}_0$, ε, β 为正常数，$\varepsilon^2 < \beta < 1$. 设 V 是由 $t_1 < t < t_3$, $v = 0$, $x_1 = (1-\varepsilon)X_1$ 包围出的区域. 这区域在 $t =$ 常数上的截面是旋转抛物面被平面所截. $t = t_1$ 时，区域蜕化为一点 $((1-\varepsilon)X_1, 0, \cdots, 0, t_1) \in \partial V$. $t = t_3$ 时，区域最大，该区域与 t 轴最大的距离是 $(1+\varepsilon)X_1$，最大距离是由点 $((1+\varepsilon)X_1, 0, \cdots, 0, t_3) \in \partial V$ 所取到. 因此当 $1 + \varepsilon \leqslant C_4$ 时，

$$V \subset \{x \mid |x| < C_4 X_2\} \times \{t_1 < t \leqslant t_2\},$$

适当地取定 $\tilde{v}_0$, β 与 ε，要证明在 ∂V 上与 V 内 $u \geqslant v > 0$. 先看 ∂V 上的情况.

于 $\partial V \cap \{v = 0\}$ 上有 $w = u - v = u \geqslant 0$.

于 $\partial V \cap \{(x, t) \mid x_1 = (1-\varepsilon)X_1\} \cap \{(x, t) \mid v \geqslant 0\}$ 上有

$$|x|^2 \leqslant \left[(1-\varepsilon)^2 + \frac{\varepsilon^2}{\beta^2}\right] X_1^2.$$

当选取 ε, β 使 $\varepsilon < \dfrac{2\beta}{1+\beta}$ 时，于 ∂V 的上述部分内应用 (7) 得：

$$\begin{aligned} w = u - v &\geqslant \frac{v_0}{2}\left(1 - \frac{|x|^2}{X_1^2}\right)^{1+\delta} - \tilde{v}_0 \\ &\geqslant \frac{v_0}{2}\left\{1 - \left[(1-\varepsilon)^2 + \frac{\varepsilon^2}{\beta}\right]\right\}^{1+\delta} - \tilde{v}_0 \\ &= 2^\delta \left(1 - \frac{1+\beta}{2\beta}\varepsilon\right)^{1+\delta} \varepsilon^{1+\delta} v_0 - \tilde{v}_0, \end{aligned}$$

取 $\tilde{v}_0$ 使上式右端为零，即

$$\tilde{v}_0 = 2^\delta \left(1 - \frac{1+\beta}{2\beta}\varepsilon\right)^{1+\delta} \varepsilon^{1+\delta} v_0.$$

上面证明了 $w = u - v$ 于 ∂V 的下、侧面均 $\geqslant 0$. 再考察 V 内. 于 V 内有 (1) 及引理的假设 $\mathscr{L} u \leqslant 0$ 及 $F \leqslant 1$，故有：

$$\mathscr{L}v \geqslant (1+|v_x|^{\sigma-2})\left[\frac{\tilde{v}_0 \nu}{16\varepsilon^2 X_1^2} F^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{t_3-t_1}{t-t_1}\right)^{\frac{1}{\sigma-2}}\right.$$

$$\left. - \frac{\tilde{v}_0\beta}{\varepsilon^2 X_1^2} n\mu F^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t_3-t_1}{t-t_1}\right)^{\frac{1}{\sigma-2}}\right]$$

$$- \frac{\tilde{v}_0}{\sigma-2} F^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t_3-t_1}{t-t_1}\right)^{\frac{1}{\sigma-2}} \frac{1}{t-t_1}$$

$$\geqslant (1+|v_x|^{2-\sigma})\left[\frac{\tilde{v}_0^{\sigma-2}}{(4\varepsilon X_1)^{\sigma-2}}\right] F^{1-\frac{\sigma}{2}} \frac{t_3-t_1}{t-t_1} \frac{\tilde{v}_0}{(\varepsilon X_1)^2}$$

$$\cdot\left(\frac{\nu}{16} - \beta n\mu\right)F^{-\frac{3}{2}} - \frac{\tilde{v}_0}{\sigma-2} F^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t-t_1}\left]\left(\frac{t_3-t_1}{t-t_1}\right)^{\frac{1}{\sigma-2}}\right.,$$

取定 $\beta = \dfrac{\nu}{32n\mu}$，限制 ε 为 $\varepsilon \leqslant \dfrac{\beta}{1+\beta}$，则应用 $F \leqslant 1$ 于 V 及 $\tilde{v}_0$ 的表示式，t_3 的限制式，则由上式得：

$$\tilde{v}_0^{-1}(t-t_1)\left(\frac{t-t_1}{t_3-t_1}\right)^{\frac{1}{\sigma-2}} F^{\frac{\sigma+1}{2}} \mathscr{L}v$$

$$\geqslant \frac{\tilde{v}_0^{\sigma-2}(t_3-t_1)}{(4\varepsilon X_1)^{\sigma}} \frac{\nu}{2} - \frac{1}{\sigma-2} F^{\frac{\sigma}{2}+1}$$

$$\geqslant \frac{\nu}{2}\left(\frac{\varepsilon^{1+\delta}}{2} v_0\right)^{\sigma-2} \frac{t_3-t_1}{(4\varepsilon X_1)^{\sigma}} - \frac{1}{\sigma-2}$$

$$= \frac{\nu(t_3-t_1)v_0^{\sigma-2}}{2^{3\sigma-1}\varepsilon X_1^{\sigma}} - \frac{1}{\sigma-2},$$

如果

$$t_3 - t_1 \geqslant c_3 \varepsilon v_0^{2-\sigma} X_1^{\sigma},$$

其中 $c_3 = \dfrac{2^{3\sigma}}{\nu(\sigma-2)}$，则上面不等式右端为正.

比较关于 $t_3 - t_1$ 的两个限制不等式得 $c_3\varepsilon \leqslant C_1$。因此当取定

$$\varepsilon = \min\left(\frac{\beta}{1+\beta}, \frac{C_1}{c_3}\right)$$

时，只要 $t_3 - t_1 = c_3 \varepsilon v_0^{2-\sigma} X_1^\sigma$，则 w 于 V 内不能取到最小值．结合 ∂V 上 $w \geqslant 0$ 知于 V 有 $w \geqslant 0$．因此于 V 有：

$$u \geqslant \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}} v_0 \left[1 - F^{\frac{1}{2}} \left(\frac{t_3 - t_1}{t - t_1}\right)^{\frac{1}{\sigma-2}}\right],$$

故当 $(1-\varepsilon)X_1 \leqslant x_1 \leqslant (1+\varepsilon/2)X_1$，$x_i = 0(2 \leqslant i \leqslant n)$，$t = t_3$ 时有：

$$u \geqslant \frac{1}{16} \varepsilon^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}} v_0. \tag{8}$$

经转轴得到，当 (6) 成立，且 $(1-\varepsilon)X_1 \leqslant |x| \leqslant (1+\varepsilon/2)X_1$，$t = t_3$ 时，(8) 成立．再由 (7) 补出 $t = t_3$，$|x| \leqslant (1-\varepsilon)X_1$ 情况下的不等式

$$u \geqslant \frac{1}{2} v_0[1-(1-\varepsilon)^2]^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}} \geqslant \frac{1}{2} \varepsilon^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}} v_0.$$

因此当 $|x| \leqslant (1+\varepsilon/2)X_1$，$t = t_4 = t_1 + c_3 \varepsilon v_0^{2-\sigma} X_1^\sigma$ 时，(8) 成立．

用 $\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-1} X_1$ 与 $\left(\frac{1}{16}\varepsilon^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}}\right)^{k-1} v_0\ (k=1,2,\cdots)$ 代替 X_1 与 v_0 得到，当 $\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-1}(1+\varepsilon)X_1 < C_4 X_2$，$\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-1} X_1 < c_2 \left(\frac{1}{16}\varepsilon^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}}\right)^{k-1} v_0$，

$$t_2 = t_1 + c_3 \varepsilon \frac{\eta^k - 1}{\eta - 1} v_0^{2-\sigma} X_1^\sigma, \tag{9}$$

其中 $\eta = 16^{\sigma-2} \varepsilon^{1-\sigma}(1+\varepsilon/2)^\sigma$ 时，我们有 $\forall |x| \leqslant (1+\varepsilon/2)^k X_1$，

$$u(x, t_2) \geqslant \left(\frac{1}{16}\varepsilon^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}}\right)^k v_0.$$

要使有 k 使 $(1+\varepsilon/2)^{k-1}X_1 < X_2$ 成立，结合 $(1+\varepsilon/2)^{k-1}(1+\varepsilon)X_1 < C_4 X_2$ 可见，取 $C_4 = 1+\varepsilon$ 即可．今可取 k 使

$$(1+\varepsilon/2)^{k-1}X_1 < X_2 \leqslant (1+\varepsilon/2)^k X_1$$

成立. 记

$$\frac{c_3\varepsilon\eta}{\eta-1}=C_5,\quad \frac{\log\left(16\varepsilon^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}}\right)}{\log(1+\varepsilon/2)}=C_6,$$

$$\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\eta^2}\right)^{\frac{1}{\sigma-2}}=c_4.$$

由 (9) 得:

$$v_0^{\sigma-2}=\frac{X_1^\sigma}{t_2-t_1}\frac{c_3\varepsilon}{\eta-1}(\eta^k-1)\leqslant\frac{X_1^\sigma}{t_2-t_1}C_5\eta^{k-1}$$

$$<\frac{X_1^\sigma}{t_2-t_1}C_5\exp\left(\frac{\log(X_2/X_1)\log\eta}{\log(1+\varepsilon/2)}\right)$$

$$=\frac{X_2^\sigma C_5}{t_2-t_1}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{\frac{\log\eta}{\log(1+\varepsilon/2)}-\sigma}=\frac{X_2^\sigma C_5}{t_2-t_1}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{C_6(\sigma-2)},\qquad(10)$$

$$v_0^{\sigma-2}\geqslant\frac{X_1^\sigma}{t_2-t_1}c_3\varepsilon\eta^{k-1}\geqslant\frac{X_2^\sigma}{t_2-t_1}C_5\frac{\eta-1}{\eta^2}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{C_6(\sigma-2)}$$

$$=\frac{X_2^\sigma}{t_2-t_1}C_5c_4^{\sigma-2}\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{C_6(\sigma-2)},\qquad(11)$$

故当

$$C_5\leqslant\frac{(t_2-t_1)u_0^{\sigma-2}}{X_2^\sigma\left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{C_6(\sigma-2)}}\leqslant C_5\Lambda,\quad(\Lambda\geqslant1)$$

时有

$$c_4^{\sigma-2}\Lambda^{-1}u_0^{\sigma-2}\leqslant v_0^{\sigma-2}\leqslant u_0^{\sigma-2}.$$

因此，总可于 $[c_4\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}u_0,\ u_0]$ 中选出 v_0，使 (10)、(11) 成立. 对此 v_0，

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-1}X_1<c_2\left(\frac{1}{16}\varepsilon^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}}\right)^{k-1}v_0$$

可由下式得到

$$X_2<c_2c_4\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}u_0\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{C_6}.$$

取 $C_7=c_2c_4$，则

$$u(x,t_2)\geqslant\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-C_6}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{C_6}c_4\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}u_0.$$

再取 $C_8=(1+\varepsilon/2)^{-C_6}\ c_4=\frac{1}{16}\varepsilon^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}}c_4$，引理得证.

球 $|x-x^0|<R$ 记为 $B_R(x^0)$. 正方形 $|x_i-x_i^0|<R(1\leqslant i\leqslant n)$ 记为 $k_R(x^0)$. 记 $k_R(x^0)\times\{t^0<t<t^0+\eta R^\sigma\}$ 为 $K_{R,\eta}(x^0,t^0)$. $B_R(0)$，$k_R(0)$，$K_{R,\eta}(0,0)$ 分别简记为 B_R，K_R，$K_{R,\eta}$. 可测集 A 的测度记为 $|A|$.

引理 3 设 $0<R<1$，$\tilde{\eta}>0$，$u_0>0$ 及常数 $\mu_1>0$ 给定. 设于 $K_{R,\eta}(\eta=\tilde{\eta}u_0^{2-\sigma})$ 有 $u\in C^{2,1}$，$u\geqslant0$，$\mathscr{L}u\leqslant-\mu_1u_0|u_x|^\sigma$. 则存在常数 $\tau(0<\tau<1)$，仅依赖于 n，μ，ν，σ，μ_1，$\tilde{\eta}$，使当 $2<\sigma<3$ 及

$$|K_{R,\eta}\cap\{u\geqslant u_0\}|\geqslant\tau|K_{R,\eta}|,$$

时，则 $\forall R$，u_0 有

$$u_{B_{3R/4}\times\left\{\frac{\eta}{2}R^\sigma\leqslant t\leqslant\eta R^\sigma\right\}}\geqslant cu_0,$$

其中 c 为正的绝对常数.

证 令 $x=RX$，$t=\delta\tilde{\eta}R^\sigma u_0^{2-\sigma}T(1/2\leqslant\delta<1)$，$u=u_0U$，$(\sum A_{ij}u_{x_ix_j}-u_t)/(\delta\tilde{\eta}R^\sigma u_0^{1-\sigma})=\sum\widetilde{A}_{ij}U_{X_iX_j}-U_T$.

为记号简单起见，X，T，U，$\nu/\tilde{\eta}$，$2\mu/\tilde{\eta}$，$2\mu_1/\tilde{\eta}$，$\widetilde{A}_{ij}$ 再记为 x，t，u，ν，μ，μ_1，A_{ij}. 则得到:

$$\nu\left[\left(\frac{R}{u_0}\right)^{\sigma-2}+|p|^{\sigma-2}\right]|\xi|^2\leqslant\sum A_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$\leqslant\mu\left[\left(\frac{R}{u_0}\right)^{\sigma-2}+|p|^{\sigma-2}\right]|\xi|^2,\quad\forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,$$

$$\mathscr{L}u\equiv\sum A_{ij}u_{x_ix_j}-u_t\leqslant-\mu_1|p|^\sigma$$

于

$$Q\equiv\{(x,t)|\,|x|<1,\ 0<t\leqslant1\}.$$

又

$$|Q\cap\{u\geqslant 1\}|\geqslant\left[1-2\frac{|k_1|}{|B_1|}(1-\tau)\right]|Q|. \tag{12}$$

选取适当的函数 $w(x,t,N)$ $(0\leqslant w\leqslant 1)$，其中$N$为大的参数，$w$仅依赖于$|x|$，$t$，$N$。又设

$$[w,w_{|x|},w_t]_{|x|=7t/8}=0\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

记

$$v=\begin{cases}u-w, & 于\ Q_1=\left\{(x,t)\,\middle|\,|x|<\frac{7}{8}t,\ 0\leqslant t\leqslant 1\right\},\\ u, & 于\ Q\backslash Q_1.\end{cases}$$

则有 $v\in C^{1,1}(Q)\cap W^{2,1}_{n+1}(Q)$，且 $v_{x_ix_j}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 于 $\{(x,t)|\,|x|=7t/8,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 上具有有限跳跃．令

$$\tilde{v}(x,t)=\inf_{0\leqslant\gamma\leqslant 1}\{0,v(x,\gamma)\},$$

$\check{v}(x,t)$ 为 $\tilde{v}(x,t)$ 于x方向的下凹包，则 $\check{v}\leqslant\tilde{v}\leqslant v$，函数$\check{v}$为 Lip 连续，关于$t$为单调不增，关于$x$为凹(见第七章引理 19)．因此 $\check{v}_t$ 与 $\check{v}_{x_ix_j}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 对 $(x,t)\in\bar{Q}$ 几乎处处存在．由第七章定理 23 得

$$[-\inf_{x\in B_1}v(x,1)]^{n+1}\leqslant\frac{n+1}{|B_1|}\int_{Q_3}-v_t\det(v_{x_ix_j})dxdt, \tag{13}$$

其中 Q_3 为 v 于Q的负接触集．

于 Q_3 上有：

$$0\leqslant-\check{v}=-v=w-u\leqslant w\leqslant 1,$$
$$|\check{v}_{|x|}|\leqslant-\check{v}/(1-7/8)\leqslant 8, \tag{14}$$

这是因为 $Q_3\subset Q\cap\{|x|\leqslant 7/8\}$.

$$u-w=v=\check{v}\leqslant 0,\quad u\leqslant w\leqslant 1.$$

因此应用 (12) 得

$$|Q_3|\leqslant|\{(x,t)\in Q|u\leqslant 1\}\leqslant 2\frac{|k_1|}{|B_1|}(1-\tau)|Q|$$
$$=c_1(1-\tau),$$
$$-v_t\geqslant 0,\quad(v_{x_ix_j})\geqslant 0.$$

因此于 Q_3 上有:

$\sum A_{ij}v_{x_ix_j} \leqslant \mathscr{L} v = \mathscr{L} u - \mathscr{L} w \leqslant -\mu_1|p|^\sigma - \sum A_{ij}w_{x_ix_j} + w_t.$

于 Q_3 上 $(v_{x_ix_j})$ 的特征值记为 $(0\leqslant)\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. 则有

$$0 \leqslant \Delta v = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leqslant \frac{1}{\nu} \sum A_{ij}v_{x_ix_j} \Big/ \left[\left(\frac{R}{u_0}\right)^{\sigma-2} + |p|^{\sigma-2}\right]$$

$$\leqslant \frac{\mu}{\nu}\sum|w_{x_ix_j}| + \frac{1}{\nu}(-\mu_1|p|^\sigma + w_t) \Big/ \left[\left(\frac{R}{u_0}\right)^{\sigma-2} + |p|^{\sigma-2}\right], \tag{15}$$

选取 w 使能满足

$$|w_t| \leqslant c_2 N, \quad |w_{x_ix_j}| \leqslant c_3 N^2 (1 \leqslant i, j \leqslant N).$$

故当 $|p| \geqslant \alpha(N)$ 或 $R/u_0 \geqslant \alpha(N)$ 时,应用(15)得:

$$0 \leqslant \Delta v \leqslant \frac{\mu}{\nu} n^2 c_3 N^2 + \frac{1}{\nu} \max\{N\alpha(N)^{2-\sigma}, \max_{|p|\geqslant\alpha(N)} [-\mu_1|p|^2 + c_2 N|p|^{2-\sigma}]\}$$

$$\leqslant c_4 \max\{N^2, N\alpha(N)^{2-\sigma}\}.$$

$$-v_t \leqslant \mathscr{L} v \leqslant -\mu_1|p|^\sigma - \sum A_{ij}w_{x_ix_j} + w_t \leqslant c_5 N^3.$$

因此得到:

$$\int_{Q_3\cap\{p\geqslant\alpha(N)\text{或}R/u_0\geqslant\alpha(N)\}} -v_t \det(v_{x_ix_j}) dx dt \leqslant c_6 N^2 \max\{N^3, N\alpha(N)^{2-\sigma}\}^n (1-\tau), \tag{16}$$

其中 $c_6 = c_1 c_4 c_5$.

取 $\alpha(N) = N^{-\frac{2}{\sigma-2}}$, 当 $|p| \leqslant \alpha(N)$ 及 $R/u_0 \leqslant \alpha(N)$ 时有:

$$|\sum A_{ij}w_{x_ix_j}| \leqslant \mu n^2 \left[\left(\frac{R}{u_0}\right)^{\sigma-2} + |p|^{\sigma-2}\right] c_3 N^2 \leqslant 2\mu c_3 n^2.$$

我们可选取 $w(x, t)$ 使于 $|p| \leqslant \alpha(N)$ 及 $R/u_0 \leqslant \alpha(N)$ 情况下有:

$$w_t \leqslant c_7$$

因此

$$-v_t \leqslant \mathscr{L} v \leqslant -\mu_1 |p|^\sigma - \sum A_{ij} w_{x_i x_j} + w_t \leqslant c_8,$$

$$\int_{Q_3 \cap \{|p| \leqslant \alpha(N), R/u_0 \leqslant \alpha(N)\}} - v_t \det(v_{x_i x_j}) dx dt$$

$$\leqslant c_8 \int_{Q \cap \{|x| \leqslant 7/8\}} \det(\check{v}_{x_i x_j}) dx dt$$

$$\leqslant \frac{64}{15} c_8 \int_Q (1 - |x|^2) \det(\check{v}_{x_i x_j}) dx dt$$

$$\leqslant \frac{64}{15} c_8 \left\{ - \left[\int_{B_1} \mu(x, t) \det(\check{v}_{x_i x_j}) dx \right]_{t=0}^{t=1} \right.$$

$$\left. + \int_Q \mu(x, t) \sum_{i,j} \check{v}_{x_i x_j t} \frac{\partial}{\partial \check{v}_{x_i x_j}} \det(\check{v}_{x_i x_j}) dx dt, \right. \tag{17}$$

其中 $\mu(x, t) = (1 - t)(1 - |x|^2)$. 由于 $\mu(x, 1) = 0$ 及 $v(x, 0) = 0$，因此上面积分中积出部分 $[\cdots]_{t=0}^{t=1} = 0$. 施行分部积分并应用 $\mu|_{\partial B_1} = 0, v_t|_{\partial B_1} = 0, \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \check{v}_{x_i x_j}} \det(\check{v}_{x_k x_l}) = 0 \ (1 \leqslant j \leqslant n)$，见第七章引理 2，我们得到

$$\int_Q \mu \sum_{i,j} \check{v}_{x_i x_j t} \frac{\partial}{\partial \check{v}_{x_i x_j}} \det(\check{v}_{x_k x_l}) dx dt$$

$$= \int_Q \check{v}_t \sum \mu_{x_i x_j} \frac{\partial}{\partial \check{v}_{x_i x_j}} \det(\check{v}_{x_k x_l}) dx dt$$

$$= 2 \int_Q (1 - t)(-\check{v}_t) \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \check{v}_{x_k x_l}} \det(\check{v}_{x_i x_j}) dx dt$$

$$\leqslant 2 \int_Q -\check{v}_t \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \check{v}_{x_k x_k}} \det(\check{v}_{x_i x_j}) dx dt,$$

上面两式中施行分部积分的有效性，要仿第七章的做法，即首先 $\check{v}$ 向下作零延拓，向上作 $\check{v}(x, t) = \check{v}(x, 1) (t > 1)$ 延拓，对 t 光滑化得 $\check{v}_\lambda$，再作 x 方向保凹光滑化延拓得 $\check{v}_{\lambda m} (m = 1, 2, \cdots)$ 于

$\boldsymbol{R}^{n+1}$。由我们的延拓方式，于 $B_1 \times \boldsymbol{R}$ 外 $\check{v}_{\lambda m}$ 与 t 无关. 分部积分对 $\check{v}_{\lambda m}$ 在 $\Omega_m \times \{0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 中施行,其中 $\check{v}_{\lambda m}|_{\partial\Omega_m} = 0$. 施行分部积分后再令 $\int_0^1\int_{\Omega_m} = \int_0^1\int_{\Omega_1}$, 令 $m\to\infty$ 取极限 ($\lambda\to 0$ 于下面讨论)而导出上面两式的成立.

上式右端积分于非接触集 $Q\backslash Q_3$ 上为零,即

$$\int_{Q/Q_3} - v_t \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \check{v}_{x_k x_k}} \det (\check{v}_{x_i x_j}) dx dt = 0. \tag{18}$$

其原因如下: 固定 $x_1 = x_1^0$, 由 $\dfrac{\partial}{\partial \check{v}_{x_1 x_1}} \det (\check{v}_{x_i x_j})$ 作成的法线测度记为 $\omega(\check{v}, dx/dx_1)$, 则

$$\int_Q - \frac{\partial \check{v}_\lambda}{\partial t}\, \omega\left(\check{v}_\lambda,\ \frac{dx}{dx_1}\right) dx_1 dt = \int_{Q_0+Q_1+Q_2+Q_3} \cdots dx_1 dt,$$

Q_0 是 $\partial\check{v}/\partial t$ 不存在的点集的小邻域, $Q_1 = \{(x, t) | \check{v} < \tilde{v}\}\backslash Q_0$, $Q_2 = \{(x, t) | \check{v} = \tilde{v} < v\}\backslash Q_0$, $Q_3 = \{(x, t) | \check{v} = \tilde{v} = v\}\backslash Q_0$. 在 Q_0 与 Q_2 上令 $\lambda\to 0$ 时积分的估计与第七章定理 21 类似. Q_1 与 Q_3 上更简单一些,即不必像第七章定理 1 那样再分离出距 Q_2 很近的部分作另外处理, 这是因为尚有一次对 x_1 的积分, 因而边界集中测度毋须作特殊处理即可整个地令 $\lambda\to 0$. 又我们需要证明当 t 固定时,

$$\int_{Q_2\cap\{x_1=x_1^0\}} - \frac{\partial \check{v}}{\partial t}\, \omega\left(\check{v},\ \frac{dx}{dx_1}\right) = 0 \tag{19}$$

对几乎所有的 x_1^0 成立. 使上式为正的 x_1^0 必使 $\omega(\check{v}, dx/dx_1)|_{x_1=x_1^0} > 0$, 凹函数 $\check{v}$ 于 $x_1 = x_1^0$ 有 $n-1$ 维角点. $\check{v}$ 是 $\tilde{v}$ 的下凹包, 因此必有两点 $(x_1^0, x_2^i, \cdots, x_n^i)$ $(i = 1, 2)$ 使

$$\begin{aligned}\check{v}(x_1^0, x_2, \cdots, x_n) = \theta\tilde{v}(x_1^0, x_2^1, \cdots, x_n^1)\\ + (1-\theta)\tilde{v}(x_1^0, x_2^2, \cdots, x_n^2), \quad (0 < \theta < 1),\end{aligned}$$

且 $\tilde{v}(x_1^0, x_2^i, \cdots, x_n^i)$ 是 $\check{v}$ 于 $(x_1^0, x_2^i, \cdots, x_n^i)(i = 1, 2)$ 附近的绝对最小值, 否则不可能构成 $n-1$ 维角点. 因而 x_1^0 是孤立点, 只能属于一个可列集. 因而 (19) 得证. x_1 换为 $x_2, \cdots, x_n$, 令

$\lambda \to 0$ 得证 (18) 成立。

结合 (16), (17), (18) 得:

$$\int_{Q_3} - v_t \det (v_{x_i x_j}) dxdt \leqslant c_6 N^{3n+2}(1 - \tau)$$
$$+ c_9 \int_{Q_3} - v_t \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v_{x_k x_k}} \det(v_{x_i x_j}) dxdt$$

其中 $c_9 = \frac{128}{15} c_8$. 类似地得到

$$\int_{Q_3} - v_t \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v_{x_k x_k}} \det (v_{x_i x_j}) dxdt \leqslant nc_6 N^{3n-1}(1 - \tau)$$
$$+ nc_9 \int_{Q_3} - v_t \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial v_{x_k x_k} \partial v_{x_l x_l}} \det (v_{x_i x_j}) dxdt,$$

$\cdots$,

因此得:

$$\int_{Q_3} - v_t \det (v_{x_i x_j}) dxdt \leqslant c_{10} N^{3n+2}(1 - \tau)$$
$$+ c_{11} \int_{Q_3} - v_t \Delta v dxdt \leqslant c_{12} N^{3n+2}(1 - \tau) + c_{13}$$
$$\cdot \int_{Q \cap \{|p| \leqslant \alpha(N), \frac{R}{u_0} \leqslant \alpha(N)\}} \Delta v dxdt, \tag{20}$$

选 $w(x, t)$ 使

$$w_{rr} \geqslant \beta(N) > 0, \quad (r = |x|)$$

于 $Q \Big\backslash \left\{(x, t) \middle| \frac{|x|}{t} \leqslant \gamma(N)\right\}$. 则有

$$\int_{Q_3 \cap \{|x| \leqslant \gamma(N)\}} \Delta v dxdt \leqslant \int_{Q_3 \cap \{|x| \leqslant 2\gamma(N)\}} \left[2 - \frac{|x|}{\gamma(N)}\right] \Delta v dxdt$$
$$= \int_{Q \cap \{|x| \leqslant 2\gamma(N)\}} \left[2 - \frac{|x|}{\gamma(N)}\right] \Delta \check{v} dxdt$$
$$= \int_{Q \cap \{|x| \leqslant 2\gamma(N)\}} |\check{v}_{|x|}| \frac{dxdt}{\gamma(N)}$$

$$\leqslant \frac{8}{\gamma(N)}\int_{Q\cap\{|x|\leqslant 2\gamma(N)\}} dxdt = 8\cdot 2^n\gamma(N)^{1-n}. \tag{21}$$

记

$$\check{u}_{rr} = \check{v}_{rr} + w_{rr}, \quad (r = |x|).$$

由于

$$\check{v}_{rr} = \sum_{i,j=1}^{n} v_{x_i x_j}\frac{x_i x_j}{r^2} \geqslant 0,$$

于区域 $w_{rr} \geqslant \beta(N)$，我们有

$$\check{u}_{rr} \geqslant w_{rr} \geqslant \beta(N) > 0.$$

因此 $\check{u}_r$ 为单调增加，$\check{u}_r$ 对任何 $t\in[0,1]$ 与任何方向 $\theta = x/|x|$ 至多有一零点 $r_0(\theta, t)$，即 $u_r(r_0, \theta, t) = 0$. 我们有

$$\check{u}_r \geqslant \int_{r_0}^{r}\beta(N)dr = \beta(N)(r - r_0), \quad 当\ r \geqslant r_0,$$

$$-\check{u}_r \geqslant \int_{r}^{r_0}\beta(N)dr = \beta(N)(r_0 - r), \quad 当\ r \leqslant r_0.$$

两种情况结合得：

$$|\check{u}_r| \geqslant \beta(N)|r - r_0|,$$

特别在下接触集 Q_3 上有：

$$|p| \geqslant |u_r| \geqslant \beta(N)|r - r_0|.$$

这不等式结合 (15) 得：

$$0 \leqslant \Delta v \leqslant \frac{\mu}{\nu}\sum|w_{x_i x_j}| + \frac{1}{\nu}(-\mu|p|^{\sigma} + w_t)\Big/$$

$$\left[\left(\frac{R}{u_0}\right)^{\sigma-2} + |p|^{\sigma-2}\right]$$

$$\leqslant \frac{\mu}{\nu}n^2 c_3 N^2 + \frac{1}{\nu}c_2 N\beta(N)^{2-\sigma}|r - r_0|^{2-\sigma},$$

$$\int_{Q_3\cap\{|p|<\alpha(N),\frac{R}{u_0}<\alpha(N),w_{rr}>\beta(N)\}} \Delta v dxdt$$

$$\leqslant \left[\int_{Q_3\cap\{|p|<\alpha(N),\frac{R}{u_0}<\alpha(N),w_{rr}>\beta(N)\}} (\Delta v)^{\frac{\sigma-1}{2\sigma-4}} dxdt\right]^{\frac{2\sigma-4}{\sigma-1}} |Q_3|^{\frac{3-\sigma}{\sigma-1}}$$

$$\leqslant \left\{\iint_Q \left[c_{14}N^{\frac{\sigma-1}{\sigma-2}} c +_{15} N^{\frac{\sigma-1}{2\sigma-4}}\beta(N)^{\frac{1}{2}(1-\sigma)}\big||x|-r_0\big|^{\frac{1}{2}(1-\sigma)}\right]dxdt\right\}^{\frac{2\sigma-4}{\sigma-1}}$$

$$\cdot\ [c_1(1-\tau)]^{\frac{3-\sigma}{\sigma-1}} \leqslant c_{16}[N^2 + N\beta(N)^{2-\sigma}](1-\tau)^{\frac{3-\sigma}{\sigma-1}}. \tag{22}$$

结合 (13), (20), (21), (22) 得:

$$[-\inf_{x\in B_1} v(x,1)]^{n+1} \leqslant c_{17}N^{3n+2}(1-\tau)$$

$$+ c_{18}[N^4 + N\beta(N)^{2-\sigma}](1-\tau)^{\frac{3-\sigma}{\sigma-1}} + c_{19}\gamma(N)^{1-n}. \tag{23}$$

$w(x, t)$ 的选取方法如下：令

$$w(x,t) = [1 - e^{-Ntf(\theta)}]^2,$$

其中 $\theta = 1 - \dfrac{8|x|}{7t}$, 又 $f(\theta) \in C^2[0,1]$ 为待定函数. 则有

$$w_{|x|} = -\frac{16}{7}Nf'(\theta)e^{-Ntf(\theta)}[1 - e^{-Ntf(\theta)}],$$

$$w_{|x||x|} = \frac{128}{49}N\left\{\frac{f''(\theta)}{t}e^{-Ntf(\theta)}[1 - e^{-Ntf(\theta)}]\right.$$

$$\left. + f'(\theta)^2N[2e^{-2Ntf(\theta)} - e^{-Ntf(\theta)}]\right\}$$

$$= \frac{128N^2e^{-Ntf}(1-e^{-Ntf})}{49Ntf}\left(ff'' + f'^2Ntf\frac{2-e^{-Ntf}}{e^{Ntf}-1}\right)$$

$$\geqslant \frac{128N^3e^{-Ntf}(1-e^{-Ntf})}{49Ntf}\left[ff'' + f'^2\left(1-\frac{3}{2}Ntf\right)\right]$$

$$\geqslant \frac{192N^3}{49}e^{-2/3}(1-e^{-2/3})\left[ff'' + f'^2\left(1-\frac{3}{2}Ntf\right)\right]$$

当 $Nf \leqslant 2/3$ 及 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时成立. 取

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta - \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}\dfrac{\theta^2}{\theta_0} + \dfrac{\alpha}{2+\alpha}\dfrac{\theta^3}{\theta_0^2}, & (0\leqslant\theta\leqslant\theta_0), \\ \dfrac{2}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\theta_0^\alpha\,[1 - g(\varphi)]^{1-\alpha}, & (\theta_0\leqslant\theta\leqslant 1), \end{cases}$$

其中 $0<\alpha<1/2$，$\varphi=1-\theta=\frac{8|x|}{7t}$，$\theta_0$ 为待定常数.

$$g(\varphi)=\begin{cases}\varphi, & 3\delta\leqslant\varphi\leqslant 1-\theta,\\ \varphi+\dfrac{(3\delta-\varphi)^3}{6\delta^2}, & 2\delta\leqslant\varphi\leqslant 3\delta,\\ 2\delta+\dfrac{(\varphi-\delta)^3}{6\delta^2}, & \delta\leqslant\varphi\leqslant 2\delta,\\ 2\delta, & 0\leqslant\varphi\leqslant\delta,\end{cases}$$

其中 $\delta=1/N$. 显然 $f(\theta)\in C^2[0,1]$. 今取定 $\gamma(N)=21/8N$.

于区间 $\theta_0\leqslant\theta\leqslant 1-3/N$ 中有:

$$ff''+f'^2\left(1-\frac{3}{2}Nf\right)=\frac{4(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2(2+\alpha)^2}$$

$$\cdot\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[1-2\alpha-\frac{3(1-\alpha)N\cdot 2\theta_0^\alpha\theta^{1-\alpha}}{2(1+\alpha)(2+\alpha)}\right]$$

$$\geqslant\frac{4(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2(2+\alpha)^2}\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^{2\alpha}\left[1-2\alpha-\frac{3(1-\alpha)N\theta_0^\alpha}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\right]$$

$$=\frac{2(1-\alpha)(1-2\alpha)}{(1+\alpha)^2(2+\alpha)^2}\theta_0^{2\alpha}=\frac{(1-2\alpha)^3}{18(1-\alpha)N^2}.$$

当我们选取

$$\theta_0=\left[\frac{(1+\alpha)(2+\alpha)(1-2\alpha)}{6(1-\alpha)N}\right]^{1/\alpha}$$

时,由此当 $0\leqslant\theta\leqslant 1-3/N$ 时有

$$Nf\leqslant\frac{1-2\alpha}{3(1-\alpha)}\leqslant\frac{2}{3}.$$

于区域 $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$ 中有:

$$ff''+f'^2=1-\frac{12\alpha}{1+\alpha}\frac{\theta}{\theta_0}+\frac{4(5+16\alpha+9\alpha^2)}{3(2+\alpha)(1+\alpha)^2}\alpha^2\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2$$

$$+15\alpha^2\left[-\frac{4}{3(1+\alpha)}\frac{\theta}{\theta_0}+\frac{1}{2+\alpha}\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2\right]^2,$$

限定 $0<\alpha\leqslant 1/11$ 时，我们有

$$ff''+f'^2\geqslant c_{20},\quad (0\leqslant\theta\leqslant\theta_0).$$

$$\left[ff''+f'^2\left(1-\frac{3}{2}Nf\right)\right]_{0<\theta<\theta_0}\geqslant c_{20}+O(N^{1-\alpha}).$$

因此当 $0\leqslant\theta\leqslant 1-3/N$ 时有：

$$w_{|x||x|}\geqslant\frac{192N^2}{49}e^{-2/3}(1-e^{-2/3})\left[ff''+f'^2\left(1-\frac{3}{2}Nf\right)\right]\geqslant c_{21}.$$

因此我们取 $\beta(N)=c_{21}$.

$$w_{|x|}=-\frac{16}{7}Nf'(\theta)e^{-Ntf(\theta)}[1-e^{-Ntf(\theta)}],$$

$$f'(\theta)=\begin{cases}1-\dfrac{4\alpha}{1+\alpha}\dfrac{\theta}{\theta_0}+\dfrac{3\alpha}{2+\alpha}\dfrac{\theta^2}{\theta_0^2}, & (0\leqslant\theta\leqslant\theta_0),\\ \dfrac{2(1-\alpha)}{(1+\alpha)(2+\alpha)}\theta_0^\alpha[1-g(\varphi)]^{-\alpha}g'(\varphi), & (\theta_0\leqslant\theta\leqslant 1).\end{cases}$$

因此 $f'(\theta)=O(1)$, $w_{|x|}=O(N)$,

$$w_t=-w_{|x|}-2Nf(\theta)e^{-Ntf(\theta)}[1-e^{-Ntf(\theta)}]=O(N).$$

于集合 $Q_3\cap\{|p|\leqslant\alpha(N)\}$ 上有：

$$|w_{|x|}|=|u_{|x|}-v_{|x|}|\leqslant\alpha(N)+8\leqslant 9,$$

$$Nf(\theta)\leqslant\begin{cases}c_{22}N\theta\leqslant c_{23}N\theta_0=O(N^{1-1/\alpha}), & (0\leqslant\theta\leqslant\theta_0),\\ c_{24}N\theta_0^\alpha\leqslant c_{25}, & (\theta_0\leqslant\theta\leqslant 1).\end{cases}$$

因此得到

$$w_t\leqslant 9+c_{26}Nf(\theta)\leqslant c_{27},$$

$$w_{x_ix_j}=w_{|x||x|}\frac{x_ix_j}{|x|^2}+\frac{w_{|x|}}{|x|}\frac{\delta_{ij}|x|^2-x_ix_j}{|x|^2},\quad (1\leqslant i,j\leqslant n),$$

$$w_{|x||x|}=\frac{128}{49}N^2\left[ff''e^{-Ntf}\frac{1-e^{-Ntf}}{Ntf}+f'^2(2e^{-2Ntf}-e^{-Ntf})\right]$$
$$=O(N^2).$$

这是因为：

$$ff''=\begin{cases}\left(1-\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}\dfrac{\theta}{\theta_0}+\dfrac{\alpha}{2+\alpha}\dfrac{\theta^2}{\theta_0^2}\right)\left(-\dfrac{4\alpha}{1+\alpha}\dfrac{\theta}{\theta_0}+\dfrac{6\alpha}{2+\alpha}\dfrac{\theta^2}{\theta_0^2}\right)\\ \qquad =O(1),\quad (0\leqslant\theta\leqslant\theta_0),\\ \dfrac{4(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2(2+\alpha)^2}\theta_0^{2\alpha}\{[1-g(\varphi)]^{1-2\alpha}g''(\varphi)-\alpha[1\\ \quad -g(\varphi)]^{-2\alpha}g'(\varphi)^2\}=O(1),\quad (\theta_0\leqslant\theta\leqslant 1).\end{cases}$$

$$\frac{w_{|x|}}{|x|}=-2N^2\frac{ff'}{\varphi}e^{-Ntf}\frac{1-e^{-Ntf}}{Ntf}$$

$$=\begin{cases}O(N^2\theta)=O(N^{2-1/\alpha}),\quad (0\leqslant\theta\leqslant\theta_0),\\ O\left\{N^2\theta_0^{2\alpha}[1-g(\varphi)]^{1-2\alpha}g'(\varphi)\dfrac{1}{\varphi}\right\}=O(N),\\ \qquad\qquad (1/N\leqslant\varphi\leqslant 1-\theta_0),\\ 0,\qquad\qquad (0\leqslant\varphi\leqslant 1/N).\end{cases}$$

因此有

$$w_{x_ix_j}=O(N^2),\quad (1\leqslant i,\ j\leqslant n).$$

由 (23) 得

$$-\inf_{B_1}v(x,1)\leqslant c_{28}[N^{3n+2}(1-\tau)+N^2(1-\tau)^{\frac{3-\sigma}{\sigma-1}}+N^{1-n}]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\leqslant c_{29}[N^{3n+2}(1-\tau)^{\frac{3-\sigma}{\sigma-1}}+N^{1-n}]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$=c_{30}(1-\tau)^{\frac{(n-1)(3-\sigma)}{(4n+1)(n+1)(\sigma-1)}},$$

当我们取定 $N=(1-\tau)^{\frac{3-\sigma}{(4n+1)(\sigma-1)}}$ 时。

取 $\alpha=1/11$ 得到

$$\inf_{|x|\leqslant 3/4}u(x,1)\geqslant\inf_{|x|\leqslant 3/4}w(x,1)+\inf_{|x|\leqslant 3/4}v(x,1)$$

$$\geqslant(1-e^{-\frac{3}{10}7^{-10/11}})^2-c_{30}(1-\tau)^{\frac{(n-1)(3-\sigma)}{(4n+1)(n+1)(\sigma-1)}}$$

$$\geqslant 2c-c=c,$$

当我们记 $c=\dfrac{1}{2}(1-e^{-\frac{3}{10}7^{-10/11}})^2$ 且取定

$$\tau\geqslant\left(\frac{c}{c_{30}}\right)^{\frac{(4n+1)(n+1)(\sigma-1)}{(n-1)(3-\sigma)}}$$

时．回复到最初的记号，引理得证．

引理 4 给定 $0<R<1$，$\mu_1>0$．记 $\mu_2=2^{[\sigma]+2}$，其中 $[\sigma]$ 为 σ 的整数部分，又 $2<\sigma<3$．设在柱形区域 $B_{4n^{1/2}R}\times\{0\leqslant t\leqslant\mu_2\eta R^\sigma\}$ 中，$u\in C^{2,1}$，$u\geqslant 0$，$\mathscr{L}u\leqslant-\mu_1u_0|p|^\sigma$，$(p=u_x)$．则存在常数 $\tau(0<\tau<1)$，C_9，C_{10} 与 C_{11} 使当 $C_6\leqslant\eta u_0^{\sigma-2}\leqslant 2C_9$，$R\leqslant C_{10}u_0$，$|K_{R,\eta}\cap\{u\geqslant u_0\}|\geqslant\tau|K_{R,\eta}|$ 时有：

$$u|_{k_{3R}\times[\eta R^\sigma,\mu_2\eta R^\sigma]}\geqslant C_{11}u_0.$$

注 当柱形区域 t 方向长度短于 $\mu_2\eta R^\sigma$，则结论在该较短的柱形区域中成立．

证 按引理 3 取定 τ，则有

$$u|_{B_{3R/4}\times\{t=\eta R^\sigma/2\}}\geqslant cu_0,$$

取 $t_1=\eta R^\sigma/2$，$X_1=3R/4$，$\eta R^\sigma\leqslant t_2\leqslant\mu_2\eta R^\sigma$，$X_2=3\eta^{1/2}R$，$\Lambda=2\mu_2-1$，$u_0$ 用 cu_0 代替而应用引理 2，再记 $2c^{2-\sigma}(3n^{1/2})^\sigma\cdot(4n^{1/2})^{C_6(\sigma-2)}C_5=C_9$，$(2\mu_2-1)^{-\frac{1}{\sigma-2}}(4n^{1/2})^{-C_6}cC_7=C_{10}$，$(2\mu_2-1)^{-\frac{1}{\sigma-2}}(4n^{1/2})^{-C_6}cC_8=C_{11}$，就得到所要的结论．证毕．

引理 5 给定可测集 $\Gamma\subset K_{R_0,\eta^0}$，$|\Gamma|\neq 0$．设 $\eta^1\leqslant\eta^0$．

$$\tilde{\Gamma}\supseteq\Gamma\bigcup_{\substack{K_{R,\eta}(x^0,t^0)\subset K_{R_0,\eta^0}\\ \eta^1\leqslant\eta<2\eta^1}}\{k_{3R}(x^0)\times[t^0+\eta R^\sigma,t^0+2^{[\sigma]+2}\eta R^\sigma]\cap K_{R_0,\eta^0}\,|\,|\Gamma\cap K_{R,\eta}(x^0,t^0)|\geqslant\tau|K_{R,\eta}(x^0,t^0)|\},$$

则存在常数 C_{12}，C_{13} 仅依赖于 n，η^0，η^1，σ 使下面三情况至少有一为真．

(i) $|\tilde{\Gamma}|\geqslant[1+C_{12}(1-\tau)]|\Gamma|$ 或 $|\tilde{\Gamma}|=|K_{R_0,\eta^0}|$；

(ii) 存在 $K_{R,\eta}(x^0,t^0)\subset K_{R_0,\eta^0}$，使它的上面在 $t=\eta^0R_0^\sigma$ 上且

$$|\Gamma\cap K_{R,\eta}(x^0,t^0)|\geqslant\tau|K_{R,\eta}(x^0,t^0)|,$$

$$R\geqslant C_{13}\left(\frac{|\Gamma|}{|K_{R_0,\eta^0}|}\right)^{1/\sigma}R_0;$$

(iii) 存在 $K_{R_0,\eta^0}(0,t^0)\subset K_{R_0,\eta^0}$ 使 $\eta^1\leqslant\eta\leqslant\eta^2$，

$$|\Gamma\cap K_{R_0,\eta}(0,t^0)|\geqslant\tau|K_{R_0,\eta}(0,t^0)|,$$

其中 $\eta^0/\eta=l^0$，l^0 为整数，$t^0=l\eta R^\sigma$，$l\in\{0,1,\cdots,l^0-1\}$.

证 不失一般性可设 $R_0=1$. 记 $\log_2(\eta^0/\eta^1)=\lambda$，分 K_{1,η^0} 为 $2^{[\lambda]}$ 个相等小长方体 $K_{1,\eta_0}(0,t^j)$，其中 $[\lambda]$ 是 λ 的整数部分，$\eta_0=\dfrac{\eta^0}{2^{[\lambda]}}=\eta^1 2^{\lambda-[\lambda]}$，$t^j=j\eta_0$，$0\leqslant j<2^{[\lambda]}$. 任一 $K_{1,\eta_0}(0,t^j)$ 使

$$|\Gamma\cap K_{1,\eta_0}(0,t^j)|<\tau|K_{1,\eta_0}(0,t^j)|.$$

分为 $2^{n+[\lambda+\sigma]-[\lambda]}$ 个相等小长方体 $K_{1/2,\eta_1}$，其中

$$\eta_1=\frac{\eta_0 2^\sigma}{2^{[\lambda+\sigma]}}=\eta^1 2^{\lambda+\sigma-[\lambda+\sigma]}.$$

任何 $K_{1/2,\eta_1}$ 使

$$|\Gamma\cap K_{1/2,\eta_1}|<\tau|K_{1/2,\eta_1}|.$$

再分为 $2^{n+[\lambda+2\sigma]-[\lambda+\sigma]}$ 个相等小长方体 $K_{1/4,\eta_2},\cdots$.

小长方体 K_{2^{-k},η_k} 的一般规律是

$$\eta_k=\frac{\eta^0}{2^{[\lambda+k\sigma]}}(2^k)^\sigma=\eta^1 2^{\lambda+k\sigma-[\lambda+k\sigma]}.$$

因此有 $\eta^1\leqslant\eta_k<2\eta^1$ 及 $\sigma-1<[\lambda+k\sigma]-[\lambda+(k-1)\sigma]<\sigma+1$，因而

$$[\sigma]\leqslant[\lambda+k\sigma]-[\lambda+(k-1)\sigma]\leqslant[\sigma]+1,$$

即对应于 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 方向二等分一次，t 方向等分 $2^{[\sigma]+\delta}(\delta=0$ 或 $1)$ 次.

首先考察最大的长方体 $K_{2^{-k},\eta_k}(k=0,1,\cdots)$ 满足条件

$$|\Gamma\cap K_{2^{-k},\eta_k}|\geqslant\tau|K_{2^{-k},\eta_k}|,$$

当 $k=0$ 时情况 (iii) 为真. 否则总有 $k\geqslant1$. 设 K_{2^{-k},η_k} 是由 $\widetilde{K}^0_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ 分得. 设 t 方向具有这同一性质的长方体为 $\widetilde{K}^l_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ $(l=0,1,\cdots,L)$，即

$$|\Gamma\cap K^l_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}|<\tau|\widetilde{K}^l_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}|,\quad(0\leqslant l\leqslant L),$$

但至少有一 $K^{(l)}_{2^{-k},\eta_k}\subset\widetilde{K}^l_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ 使

$$|\Gamma\cap K^{(l)}_{2^{-k},\eta_k}|\geqslant\tau|K^{(l)}_{2^{-k},\eta_k}|,\quad(0\leqslant l\leqslant L)$$

成立。但任何 $K^{j}_{2^{-k},\eta_k}\subset\widetilde{K}^{-1}_{2^{-k+1},\eta_{k+1}}$，$K^{j}_{2^{-k},\eta_k}\subset\widetilde{K}^{L+1}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ $(j=1,2,\cdots,2^{n+[\lambda+k\sigma]-[\lambda+(k-1)\sigma]})$ 均满足

$$|\Gamma\cap K^{j}_{2^{-k},\eta_k}|<\tau|K^{j}_{2^{-k},\eta_k}|.$$

小长方体 $K^{j}_{2^{-k},\eta_k}\subset\widetilde{K}^{-1}_{2^{-k+1},\eta_{k+1}}$ 的上面与 $\widetilde{K}^{0}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ 相接触的记为 $K^{-1,j}_{2^{-k},\eta_k}$ $(1\leqslant j\leqslant 2^n)$。类似地 $K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}$ $(1\leqslant j\leqslant 2^n)$ 是 $\widetilde{K}^{L+1}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ 的小长方体，但下面与 $\widetilde{K}^{L}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ 相接触。

由于按定义有 $|\Gamma\cap K^{(l)}_{2^{-k},\eta_k}|\geqslant\tau|K^{(l)}_{2^{-k},\eta_k}|$ $(0\leqslant l\leqslant L)$，故得

$$\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\subset\tilde{\Gamma}(1\leqslant l\leqslant L),\quad K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}\subset\tilde{\Gamma}(1\leqslant j\leqslant 2^n).$$

因此应用下列诸不等式

$$|\tilde{\Gamma}\cap\widetilde{K}^{0}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}|\geqslant|\Gamma\cap\widetilde{K}^{0}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}|,$$

$$|\tilde{\Gamma}\cap\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}|\geqslant|\Gamma\cap\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}|+(1-\tau)|\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}|,$$
$$(1\leqslant l\leqslant L),$$

$$|\tilde{\Gamma}\cap K^{l+1,j}_{2^{-k},\eta_k}|\geqslant|\Gamma\cap K^{l+1,j}_{2^{-k},\eta_k}|+(1-\tau)|K^{l+1,j}_{2^{-k},\eta_k}|,$$
$$(1\leqslant j\leqslant 2^n),$$

$$\left|\bigcup_{l=1}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right|-\frac{1}{2^{[\sigma]}}\left|\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{-1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right|$$
$$=\left[L+2^{-[\sigma]-\delta}\left(1-\frac{1}{2^{[\sigma]}}\right)\right]|\widetilde{K}^{0}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}|$$
$$\geqslant\frac{L+2^{-[\sigma]-\delta}(1-2^{-[\sigma]})}{L+1+2^{-[\sigma]-\delta}}\left|\bigcup_{l=0}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right|$$

我们得到:

$$\left|\tilde{\Gamma}\cap\left\{\bigcup_{l=0}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right\}\right|-\frac{1-\tau}{2^{[\sigma]}}\left|\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{-1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right|$$
$$\geqslant\left|\Gamma\cap\left\{\bigcup_{l=0}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right\}\right|+(1-\tau)$$
$$\cdot\left|\bigcup_{l=1}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right|-\frac{1-\tau}{2^{[\sigma]}}\left|\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{-1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right|$$

$$\geqslant\left[1+\frac{L+2^{-[\sigma]-\delta}(1-2^{-[\sigma]})}{L+1+2^{-[\sigma]-\delta}}(1-\tau)\right]$$

$$\cdot\left|\Gamma\cap\left\{\bigcup_{l=0}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right\}\right|, \tag{24}$$

当 $\widetilde{K}^{0}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ 的下面在 $t=0$ 上，$K^{-1,j}_{2^{-k},\eta_k}$ $(1\leqslant j\leqslant 2^n)$ 是不需要的，于(12)中去掉 $\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{-1,j}_{2^{-k},\eta_k}$ 的项. 当 $\widetilde{K}^{L}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ 的上面在 $t=\eta^0$ 上，则 $K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}$ 在 $K_{1,\eta^0}(1\leqslant j\leqslant 2^n)$ 之外，这情况下(12)用下式代替：

$$\left|\tilde{\Gamma}\cap\left\{\bigcup_{l=0}^{L}\widetilde{K}^{l}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\right\}\right|+(1-\tau)\left|\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right|$$

$$-\frac{1-\tau}{2^{[\sigma]}}\left|\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{-1,j}_{2^{-k},\eta_k}\right|\geqslant\left[1+\frac{L+2^{-[\sigma]-\delta}(1-2^{-[\sigma]})}{L+1}\right.$$

$$\left.\times(1-\tau)\right]\left|\Gamma\cap\left\{\bigcup_{l=0}^{L}\widetilde{K}^{L}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\right\}\right|. \tag{25}$$

再考察 $K_{2^{-k},\eta_k}\subset K_{1,\eta^0}$ 使满足

$$|\Gamma\cap K_{2^{-k},\eta_k}|\geqslant\tau|K_{2^{-k},\eta_k}|,$$

且按 k 增大的次序尚未被考察的. 一般我们又得到(24). 但当 $\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{-1,j}_{2^{-k},\eta_k}$ 曾考察过，或 $\widetilde{K}^{0}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ 的下面在 $t=0$ 上，则于(24)中去掉 $\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{-1,j}_{2^{-k},\eta_k}$ 项. 当 $\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{L+1,j}_{2^{-k},\eta_k}$ 曾考察过，或 $\widetilde{K}^{L}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}$ 的上面在 $t=\eta^0$ 上，则(24)用(25)代替.

(24)，(25)对所有 k 总加起来，且注意到当 $K^{L+1,j}_{2^{-k_1},\eta_{k_1}}$ 的下面在 $\bigcup_{j=1}^{2^n}K^{-1,j}_{2^{-k},\eta_k}$ 的上面内 $(k_1<k)$ 时有：

$$2^{-[\sigma]}\left|\bigcup_{j=1}^{2^n} K_{2^{-k},\eta_k}^{-1,j}\right| \geqslant \sum_{k_1<k}\left|\bigcup_{j=1}^{2^n} K_{2^{-k_1},\eta_{k_1}}^{L+1,j}\right|,$$

由此我们得到

$$(1-\tau)|\Gamma| + |\tilde{\Gamma}| \geqslant \left[1 + \frac{1-2^{-[\sigma]}}{2^{[\sigma]+1}+1}(1-\tau)\right]$$

$$\cdot \left|\Gamma \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{K}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\right\}\right|,$$

其中 Γ 是在(12)中的 (K_{1,η^0} 外的)所有下面在 $t=\eta^0$ 上的长方体.

由于 Γ 为可测集,故有

$$\frac{|\Gamma \cap K_{R,\eta}(x^0, t^0)|}{|K_{R,\eta}(x^0, t^0)|} \to 1 \geqslant \tau \quad 当\ R \to 0,\ \forall (x^0, t^0) \in \Gamma \text{a.e.},$$

因此

$$\left|\Gamma \setminus \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{K}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\right\}\right| = 0,$$

$$\left|\Gamma \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{K}_{2^{-k+1},\eta_{k-1}}\right\}\right| = |\Gamma|.$$

因而当 Γ 的最大高度不超过 $\dfrac{1-2^{-[\sigma]}}{2^{n+1}(2^{[\sigma]+1}+1)}|\Gamma|$ 时,情况 (i) 为真,其中 $C_{12} = \dfrac{1-2^{-[\sigma]}}{2(2^{[\sigma]+1}+1)}$. 否则情况 (ii) 为真,其中 $C_{13} = \left\{\dfrac{1-2^{-[\sigma]}}{2^{n+2}(2^{[\sigma]+1}+1)}\right\}^{1/\sigma}$. 引理证毕.

现在可以证明下面的密度定理了.

定理 6 设 $u_0 > 0$, $0 < \tau_1 < 1$, $\mu_1 > 0$, $C = C(n, \mu, \nu, \sigma) > 1$ 已给定,其中 $2 < \sigma < 3$. 则存在仅依赖于 n, μ, ν, σ, μ_1, τ_1, C 的正常数 $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ 使当 $R \leqslant \bar{\xi} u_0$, $\bar{\eta} \leqslant \eta u_0^{\sigma-2} \leqslant C\bar{\eta}$, $u \in C^{2,1}$, $u \geqslant 0$, $\mathscr{L} u \leqslant -\mu_1 u_0 |p|^\sigma$ 于 $B_{4n^{\frac{1}{2}}R} \times [0, \eta R^\sigma]$ 且有:

$$|K_{R,\eta} \cap \{u \geqslant u_0\}| \geqslant \tau_1 |K_{R,\eta}|$$

时,则有

$$u|_{B_{R/4} \times (t=\eta R^\sigma)} \geqslant \bar{\zeta} u_0.$$

证 我们有

$$|K_{R,(1-\tau_1/2)\eta}\cap\{u\geqslant u_0\}|\geqslant\frac{\tau_1}{2}|K_{R,(1-\tau_1/2)\eta}|.$$

取 $\Gamma=K_{R,(1-\tau_1/2)\eta}\cap\{u\geqslant u_0\}$，$\tilde{\Gamma}=K_{R,(1-\tau_1/2)\eta}\cap\{u\geqslant C_{11}u_0\}$。则当 $(1-\tau_1/2)\eta\geqslant C_9u_0^{2-\sigma}$ 时，应用引理 4（引理 4 的 η,τ 现分别是 $\eta^1=C_9u_0^{2-\sigma}$，$\tau_1/2$）知引理 5 的假设为真，但其中 R_0 与 η^0 分别是 R，$(1-\tau_1/2)\eta$。再应用引理 5 知引理 5 结论的三种情况至少有一为真。

当情况 (i) 为真，则有

$$|K_{R,(1-\tau_1/2)\eta}\cap\{u\geqslant C_{11}u_0\}|$$
$$\geqslant[1+C_{12}(1-\tau)]\frac{\tau_1}{2}|K_{R,(1-\tau_1/2)\eta}|,$$

重复这一步骤，即取

$$\Gamma=K_{R,(1-\tau_1/2)\eta}\cap\{u\geqslant C_{11}^{k-1}u_0\},$$
$$\tilde{\Gamma}=K_{R,(1-\tau_1/2)\eta}\cap\{u\geqslant C_{11}^{k}u_0\},$$
$$\mu_2=2^{[\sigma]+2},\quad \eta^1=C_9(C_{11}^{k-1}u_0)^{2-\sigma},$$
$$\tau=[1+C_{12}(1-\tau)]^{k-1}\frac{\tau_1}{2},$$

则当 $R\leqslant C_{10}C_{11}^{k-1}u_0$ 及 $(1-\tau_1/2)\eta\geqslant C_9(C_{11}^{k-1}u_0)^{2-\sigma}$ 时，如果情况 (i) 继续为真，则有

$$|K_{R,(1-\tau_1/2)\eta}\cap\{u\geqslant C_{11}^{k}u_0\}|$$
$$\geqslant[1+C_{12}(1-\tau)]^{k}\frac{\tau_1}{2}|K_{R,(1-\tau_1/2)\eta}|.$$

当 $k=1,2,\cdots,k_0$ 时情况 (i) 均为真，其中

$$k_0=\left[\frac{\log(2/\tau_1)}{\log[1+C_{12}(1-\tau)]}\right]+1,$$

则应用引理 3 得：

$$u|_{B_{\frac{3}{4}R}\times\{t=(1-\tau_1/2)\eta R^\sigma\}}\geqslant cC_{11}^{k_0}u_0,$$

其中 $R \leqslant C_{10}C_{11}^{k_0-1}u_0$，$\left(1-\frac{\tau_1}{2}\right)\eta \geqslant C_9(C_{11}^{k_0-1}u_0)^{2-\sigma}$。再应用引理 1 得到，当

$$\frac{3}{4}R \leqslant C_2\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}cC_{11}^{k_0}u_0,\quad \eta \leqslant \frac{2}{\tau_1}C_1\left(\frac{3}{4}\right)^{\sigma}(cC_{11}^{k_0}u_0)^{2-\sigma}\Lambda$$

时有：

$$u|_{B_{R/2}\times\{t=\eta R^{\sigma}\}} \geqslant cC_3\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}C_{11}^{k_0}u_0.$$

如果引理 5 的情况 (iii) 有一次为真，即当

$$R \leqslant C_{10}C_{11}^{k_1-1}u_0,\quad (1-\tau_1/2)\eta \geqslant C_9(C_{11}^{k_1-1}u_0)^{2-\sigma} \equiv \eta_1$$
$$(1 \leqslant k_1 \leqslant k_0),$$

则有：

$$|K_{R,\eta_2}(0,t_0)\cap\{u \geqslant C_{11}^{k_1}u_0\}| \geqslant \tau|K_{R,\eta_2}(0,t_0)|,$$

其中 $\eta_1 \leqslant \eta_2 < 2\eta_1$，$\frac{t_0}{\eta_2 R^{\sigma}}$ 为整数 l 满足 $0 \leqslant l \leqslant \frac{(1-\tau_1/2)\eta}{\eta_2}-1$。应用引理 3 得：

$$u|_{B_{3R/4}\times\{t=t_0+\eta_2R^{\sigma}\}} \geqslant cC_{11}^{k_1}u_0,$$

再应用引理 1 得，当

$$R \leqslant C_2\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}cC_{11}^{k_1}u_0,$$
$$\eta \leqslant \frac{2}{\tau_1}C_1\left(\frac{3}{4}\right)^{\sigma}(cC_{11}^{k_1}u_0)^{2-\sigma}\Lambda$$

时有：

$$u|_{B_{R/2}\times\{t=\eta R^{\sigma}\}} \geqslant C_3\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}cC_{11}^{k_1}u_0.$$

如果引理 5 的情况 (ii) 有一次为真，即当

$$R \leqslant C_{10}C_{11}^{k_1-1}u_0,\quad \left(1-\frac{\tau_1}{2}\right)\eta \geqslant C_9(C_{11}^{k_1-1}u_0)^{2-\sigma} \equiv \eta_1$$
$$(1 \leqslant k_2 < k_0)$$

时有：

$$|K_{R_1,\eta_2}(x^0,t^0)\cap\{u \geqslant C_{11}^{k_2}u_0\}| \geqslant \tau|K_{R_1,\eta_2}(x^0,t^0)|,$$

其中

$$|x^0| \leqslant n^{1/2}(R - R_1), \quad t^0 + \eta_2 R_1^\sigma = \left(1 - \frac{\tau_1}{2}\right)\eta R^\sigma,$$

$$\eta_1 \leqslant \eta_2 < 2\eta_1, \tag{26}$$

$$C_{13}\left\{[1 + C_{12}(1-\tau)]^{k_2-1}\frac{\tau_1}{2}\right\}^{1/\sigma} R \leqslant R_1 \leqslant R.$$

应用引理3得:

$$u|_{B_{3R_1/4}(x^0)\times\left\{t=\left(1-\frac{\tau_1}{2}\right)\eta R^\sigma\right\}} \geqslant c C_{11}^{k_2} u_0.$$

令

$$X_1 = \frac{3}{4}R_1, \quad t_1 = \left(1 - \frac{\tau_1}{2}\right)\eta R^\sigma, \quad X_2 = \frac{3}{2}\eta^{1/2}R, \quad t_2 = \eta R^\sigma,$$

应用引理2得到,当

$$\frac{2}{\tau_1}C_5\left(\frac{3}{2}n^{1/2}\right)^\sigma\left(2n^{1/2}\frac{R}{R_1}\right)^{C_6(\sigma-2)}(cC_{11}^{k_2}u_0)^{2-\sigma} \leqslant \eta$$

$$\leqslant \frac{2}{\tau_1}C_5\left(\frac{3}{2}n^{1/2}\right)^\sigma\left(2n^{1/2}\frac{R}{R_1}\right)^{C_6(\sigma-2)}(cC_{11}^{k_2}u_0)^{2-\sigma}\Lambda \tag{27}$$

$$R \leqslant \frac{2C_7}{3n^{1/2}}\left(\frac{R_1}{2n^{1/2}R}\right)^{C_6}\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}cC_{11}^{k_2}u_0$$

时,下式成立

$$\inf_{B_{R/2}\times\{t=\eta R^\sigma\}} u \geqslant C_8\Lambda^{-\frac{1}{\sigma-2}}\left(\frac{R_1}{2n^{1/2}R}\right)^{C_6}cC_{11}^{k_2}u_0,$$

(27) 中 R/R_1, R_1/R 可用不等式 (26) 代入.

关于 η 的诸情况下的不等式当 $\tilde{\eta} \leqslant \eta u_0^{\sigma-2} \leqslant C\tilde{\eta}$ 时均能满足,只要我们取定

$$\tilde{\eta} = \max\left\{\frac{\tau}{2-\tau_1}C_9, \frac{2}{\tau_1}c^{2-\sigma}C_5\left(\frac{3}{2}n^{1/2}\right)^\sigma \cdot \left(\frac{2^{1+1/\sigma}n^{1/2}}{C_{13}\tau_1^{1/\sigma}}\right)^{C_6(\sigma-2)}\right\}C_{11}^{k_0(2-\sigma)},$$

$$C\tilde{\eta}=\min\left\{\frac{2}{\tau_1}C_1\left(\frac{3}{4}\right)^{\sigma}c^{2-\sigma},\right.$$

$$\left.\frac{2}{\tau_1}c^{2-\sigma}C_5\left(\frac{3}{2}n^{1/2}\right)^{\sigma}(2n^{1/2})^{C_6(\sigma-2)}\right\}\Lambda.$$

当 $C(\geqslant 1)$ 给定时总可定出参量 $\Lambda(\geqslant 1)$ 使上式成立.由此定理的结论就得出. 证毕.

§2 解的 Hölder 条件估计与第一边值问题解的存在唯一性

由于具第二种自然结构条件(1)、(2)的拟线性抛物方程不存在解的 Harnack 不等式,因此我们仅用密度定理来推导解的 Hölder 条件估计.

记 $d(P_1,P_2)=|x^2-x^1|+|t^2-t^1|^{1/\sigma}$, 其中 $P_1=(x^1,t^1)$, $P_2=(x^2,t^2)$. 记 $\bar{d}(P_1)=\inf\limits_{P\in\partial^*Q}d(P_1,P_2)$, $\bar{d}_{P_1P_2}=\min\{\bar{d}(P_1),\bar{d}(P_2)\}$.

定理 7 设 $u\in C^{2,1}(Q)$ 满足 $\max\limits_{\bar{Q}}|u|\leqslant M$, $\mathscr{L}u=B(x,t,u,u_x)$ 于 Q, 又满足(1),(2)且 $2<\sigma<3$. 则存在 γ, C_{14}, C_{15} 仅依赖于 n, μ, ν, σ, M 及 diam Ω, 使当 $d(P_1,P_1)\leqslant C_{14}\bar{d}_{P_1P_2}$ 时有:

$$|u(P_2)-u(P_1)|\leqslant C_{15}\left[\frac{d(P_1,P_2)}{\bar{d}^{1+\gamma}_{P_1P_2}}\right]^{\gamma}.$$

证 经移轴可暂设 $P_2=(0,\cdots,0)$. 构造标准长方体

$$K_j=\{(x,t)\,|\,|x_i|<R_j(1\leqslant i\leqslant n),$$
$$-S_j<t<0\}\quad(j=1,2,\cdots),$$

这里

$$R_j=\xi^{-j},\ \xi=8n^{3/2},\ S_j=\tilde{\eta}\left(\frac{\beta}{2}\eta^j\right)^{2-\sigma}(2nR_j)^{\sigma},\ \beta=M\eta^{-j_0},$$

其中 $\tilde{\eta}$, $\eta(3/4<\eta<1)$, j_0 为将于下面定出的常数.

要用归纳法证明

$$\operatorname*{osc}_{K_j} u \leqslant \beta\eta^j \quad (j \geqslant j_0). \tag{28}$$

如果归纳法不真,即有:

$$\operatorname*{osc}_{K_{j-1}} u \leqslant \beta\eta^{j-1}, \quad \operatorname*{osc}_{K_j} u > \beta\eta^j. \tag{29}$$

要证明在 $\tilde{\eta}$, η, j_0 适当取定下(29)将出现矛盾. 记

$$\max_{K_j} u = u(x^1, t^1), \quad \min_{K_j} u = u(x^2, t^2),$$

其中

$$(x^1, t^1), \ (x^2, t^2) \in \overline{K}_j.$$

记

$$\frac{1}{2}(\max_{K_j} u + \min_{K_j} u) = u_0,$$

$$K_j^1 = \{(x, t) \mid |x_i| < 2nR_j \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \quad -S_j < t < 0\}.$$

不失一般性可设

$$|K_j^1 \cap \{u - u_0 \leqslant 0\}| \geqslant \frac{1}{2}|K_j^1|,$$

否则用 $u_0 - u$ 代替 $u - u_0$, 相应地方程 $\mathscr{L}u = B$ 写为 $\mathscr{L}(-u) = -B$. 记

$$K_j^2 = \{(x, t) \mid |x_i| < 2nR_j(1 \leqslant i \leqslant n), \quad -S_j < t < t^1\},$$

则

$$|K_j^2 \cap \{u - u_0 \leqslant 0\}| \geqslant |K_j^1 \cap \{u - u_0 \leqslant 0\}| - \frac{S_j}{S_{j-1}}|K_j^1|$$

$$\geqslant \frac{1}{2}|K_j^1| - \frac{\eta^2}{(8n^{3/2}\eta)^\sigma}|K_j^1| \geqslant \frac{1}{4}|K_j^1|. \tag{30}$$

记

$$U = \frac{1}{h}[e^{h(u-u_0)} - 1], \quad h = \frac{2\mu}{\nu},$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{L}}U &\equiv \sum A_{ij}(x, t, u, e^{-h(u-u_0)}P)U_{x_ix_j} - U_t \\ &= e^{h(u-u_0)}B(x, t, u, e^{-h(u-u_0)}P) \\ &\quad + he^{-h(u-u_0)}\sum A_{ij}(x, t, u, e^{-h(u-u_0)}P)U_{x_i}U_{x_j}\end{aligned}$$

$$\geqslant e^{-h(u-u_0)}\mu[1+e^{-h\sigma(u-u_0)}|P|^{\sigma}]$$
$$+he^{-h(u-u_0)}\nu e^{-h(\sigma-2)(u-u_0)}|P|^{\sigma}$$
$$-\mu e^{h(\sigma-1)(u-u_0)}|P|^{\sigma}-\mu e^{h(u-u_0)}$$
$$\geqslant \mu e^{-2h(\sigma-1)M}|P|^{\sigma}-\mu e^{2hM},\quad (P=U_x),$$

又

$$\nu e^{-2h(\sigma-2)M}(1+|P|^{\sigma-2})|\xi|^2\leqslant \sum A_{ij}(x,t,u,e^{-h(u-u_0)}P)\xi_i\xi_j$$
$$\leqslant \mu e^{2h(\sigma-2)M}(1+|P|^{\sigma-2})|\xi|^2,\quad \xi\in \boldsymbol{R}^n.$$

记

$$\widetilde{U}=U-\mu e^{2hM}(S_{j-1}+t),$$

则有

$$\widetilde{\mathscr{L}}\widetilde{U}\geqslant \mu e^{-2h(\sigma-1)M}|\widetilde{P}|^{\sigma}\quad (\widetilde{P}=\widetilde{U}_x)$$

又由(30)得:

$$|K_j^2\cap\{\widetilde{U}\leqslant 0\}|\geqslant \frac{1}{4}|K_j^2|.$$

我们要应用密度定理 6, 其中 $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ 的参数 n, μ, ν, σ, μ_1, τ_1, C 现分别取为 n, $\mu e^{2h(\sigma-2)M}$, $\nu e^{-2h(\sigma-2)M}$, σ, $\dfrac{\mu h e^{-2h(\sigma-1)M}}{2(e^{hM}-1)}$, $\dfrac{1}{4}$, $\left(\dfrac{8}{3}e^{Mh}\right)^{\sigma-2}$. 下面要证明

$$\sup_{K_j^3} U\geqslant \frac{1+\bar{\zeta}}{h}\left[\exp\left(\frac{h}{2}\operatorname*{osc}_{K_j} u\right)-1\right]\equiv \widetilde{U}_0, \tag{31}$$

其中

$$K_j^3=\{(x,t)|\,|x_i|<R_{j-1}\ (1\leqslant i\leqslant n),\ -S_{j-1}<t<t^1\}.$$

当(31)不真,于 K_j^3 对函数

$$w=\widetilde{U}_0-\widetilde{U}$$

去验证能应用密度定理,其中 u_0, η, R 现分别为

$$\widetilde{U}_0,\quad \bar{\eta}\left(\frac{\beta}{2}\eta^j\right)^{2-\sigma},\quad 2nR_j.$$

由于(31)不真,因此于 K_j^3 有

$$w\geqslant 0,\quad \widetilde{\mathscr{L}}w\leqslant -\mu e^{-2h(\sigma-1)M}|w_x|^{\sigma}\leqslant -\frac{\mu h e^{-2h(\sigma-1)M}}{2(e^{hM}-1)}\widetilde{U}_0|w_x|^{\sigma},$$

又

$$K_j^2 = K_{2nR_j,\tilde{\eta}(\frac{\beta}{2}\eta^j)^{2-\sigma}}(0, -S_{j-1}),$$

$$\tilde{\eta}\left(\frac{\beta}{2}\eta^j\right)^{2-\sigma}\widetilde{U}_0^{\sigma-2} = \tilde{\eta}\left\{\frac{2}{\beta\eta^j}\frac{1+\tilde{\xi}}{h}\left[\exp\left(\frac{h}{2}\operatorname*{osc}_{K_j} u - 1\right)\right]\right\}^{\sigma-2}$$

$$= \tilde{\eta}\left[\frac{1+\tilde{\xi}}{\beta\eta^j}\operatorname*{osc}_{K_j} u \exp\left(\frac{\theta h}{2}\operatorname*{osc}_{K_j} u\right)\right]^{\sigma-2} \quad (0<\theta<1).$$

应用 (29) 及上式得到:

$$\tilde{\eta} \leqslant \tilde{\eta}\left(\frac{\beta}{2}\eta^j\right)^{2-\sigma}\widetilde{U}_0^{\sigma-2} \leqslant \left(\frac{8}{3}e^{Mh}\right)^{\sigma-2}\tilde{\eta},$$

$$\frac{2nR_j}{\widetilde{U}_0} \leqslant \frac{4nR_j}{\operatorname*{osc}_{K_j} u} \leqslant \frac{4n(8n^{3/2})^{-j}}{\beta\eta^j} \leqslant \left(\frac{4n}{\beta}\right)(8n^{3/2}\eta)^{-j_0}$$

$$= \frac{2n}{M}(8n^{3/2})^{-j_0} \leqslant \tilde{\xi},$$

当 j_0 大时上面式子成立,因此上式当 $j \geqslant j_0$ 时都成立. 由此, 密度定理 6 的诸条件均已满足. 应用定理 6 得:

$$w(x^1, t^1) \geqslant \frac{\tilde{\xi}(1+\tilde{\xi})}{h}\left[\exp\left(\frac{h}{2}\operatorname*{osc}_{K_j} u\right) - 1\right],$$

或

$$\widetilde{U}(x^1, t^1) \leqslant \frac{1-\tilde{\xi}^2}{h}\left[\exp\left(\frac{h}{2}\operatorname*{osc}_{K_j} u\right) - 1\right]. \tag{32}$$

由于

$$u(x^1, t^1) - u_0 = \frac{1}{2}\operatorname*{osc}_{K_j} u,$$

因此

$$\widetilde{U}(x^1, t^1) = \frac{1}{h}\left[\exp\left(\frac{h}{2}\operatorname*{osc}_{K_j} u\right) - 1\right] - \mu e^{2hM}(S_{j-1} + t^1).$$

结合 (32) 得到:

$$\frac{\tilde{\xi}^2}{h}\left[\exp\left(\frac{h}{2}\operatorname*{osc}_{K_j} u\right) - 1\right] \leqslant \mu e^{2hM} S_{j-1},$$

或

$$\frac{\tilde{\zeta}^2}{2\mu e^{2hM}\tilde{\eta}} \leqslant \frac{S_{j-1}}{\tilde{\eta}\operatorname*{osc}_{K_j} u} \leqslant \frac{1}{\beta\eta^j} \frac{(2nR_{j-1})^\sigma}{\left(\frac{\beta}{2}\eta^{j-1}\right)^{\sigma-2}}$$

$$\leqslant \frac{[16n^{5/2}(8n^{3/2})^{-j}]^\sigma}{2\left(\frac{\beta}{2}\eta^j\right)^{\sigma-1}} \leqslant \frac{[16n^{3/2}(8n^{3/2})^{-j_0}]^\sigma}{2M^{\sigma-1}}.$$

取 j_0 使满足

$$(8n^{3/2})^{-j_0} < \min\left\{\frac{M\tilde{\xi}}{2n},\ \frac{1}{16n^{5/2}}\left[\frac{\tilde{\zeta}^2 M^{\sigma-1}}{\mu e^{2hM}\tilde{\eta}}\right]^{\frac{1}{\sigma}}\right\}, \tag{33}$$

则 (32) 不真，因此 (31) 为真．或

$$\sup_{K_j^2} e^{h(u-u_0)} \geqslant e^{\frac{h}{2}\operatorname*{osc}_{K_j} u}(1+\tilde{\zeta}) - \tilde{\zeta} \geqslant \exp\left[\frac{h}{2}(1+e^{-2Mh}\tilde{\zeta})\operatorname*{osc}_{K_j} u\right].$$

上面右边不等式如下导出．令 $\frac{h}{2}\operatorname*{osc}_{K_j} u = \lambda$，则 $\lambda\in[0,\ Mh]$．令

$$f(\lambda) = 1+\tilde{\zeta}-\tilde{\zeta}e^{-\lambda}-e^{e^{-2Mh}\tilde{\zeta}\lambda},$$

则有 $f(0)=0$，

$$f'(\lambda) = \tilde{\zeta}e^{-\lambda} - e^{-2Mh}\tilde{\zeta}e^{e^{-2Mh}\tilde{\zeta}\lambda} \geqslant \tilde{\zeta}e^{-\lambda}[1-e^{-Mh(1-\tilde{\zeta}e^{-2Mh})}] > 0,$$

故当 $\lambda\in[0, Mh]$ 时有 $f(\lambda)>0$．由此得到

$$\sup_{K_j^4} u \geqslant u_0 + \frac{1}{2}(1+e^{-2Mh}\tilde{\zeta})\operatorname*{osc}_{K_j} u,$$

$$\operatorname*{osc}_{K_{j-1}} u \geqslant \sup_{K_j^2} u - \inf_{K_j} u \geqslant \left(1+\frac{1}{2}e^{-2Mh}\tilde{\zeta}\right)\operatorname*{osc}_{K_j} u,$$

或

$$\operatorname*{osc}_{K_j} u \leqslant \left(1+\frac{1}{2}e^{-2Mh}\tilde{\zeta}\right)^{-1}\operatorname*{osc}_{K_{j-1}} u.$$

取 $\eta = \left(1+\frac{1}{2}e^{-2Mh}\tilde{\zeta}\right)^{-1}$，就得到

$$\underset{K_j}{\operatorname{osc}} u \leqslant \eta \underset{K_{j-1}}{\operatorname{osc}} u \leqslant \beta \eta^j,$$

这与(29)矛盾．因此(28)当 $j=j_0$ 成立时，$\forall j \geqslant j_0$ 均成立．

当 $j=j_0$ 时有：

$$R_{j_0}=\xi^{-j_0}=(8n^{3/2})^{-j_0}, \quad S_{j_0}=\tilde{\eta} M^{2-\sigma}[2n(8n^{3/2})^{-j_0}]^\sigma.$$

今不再假设 $P_2=(0,\cdots,0)$，我们需取 j_0 再满足要求

$$\max_{P_1 \in P_2+K_{j_0}} d(P_1, P_2) \leqslant \frac{1}{2} \bar{d}(P_2)$$

(附带地得到 $P_2+K_{j_0} \subset Q$)．因此 j_0 除了要满足(33)而外，尚需满足

$$(8n^{3/2})^{-j_0} \leqslant \min\left\{\frac{\bar{d}(P_2)}{2n}, \frac{1}{2n}\left[\frac{\tilde{d}(P_2)M^{\sigma-2}}{2\tilde{\eta}}\right]^{1/\sigma}\right\}.$$

此情况下有

$$\underset{P_2+K_{j_0}}{\operatorname{osc}} u \leqslant 2M=\beta \eta^{j_0},$$

即(28)当 $j=j_0$ 时成立．因而 $j \geqslant j_0$ 时均成立．

故当 $P_1(x^1, t^1)$, $P_2(x^2, t^2) \in Q$，且 $t^1 \leqslant t^2$ 及

$$d(P_1, P_2) \leqslant \frac{1}{2} \bar{d}(P_2) \leqslant C_{14} \bar{d}_{P_1 P_2} \quad (\text{取 } C_{14}=2 \text{ 即可})$$

时，应用(28)及 K_j 的定义得：

$$|u(x^2, t^2)-u(x^1 t^1)| \leqslant \frac{\beta}{\eta} \max\left\{\left[\max_{1 \leqslant i \leqslant n}|x_i^2-x_i^1|^{\frac{\log(1/\eta)}{\log \xi}}\right],\right.$$

$$\left.\left[\frac{(\beta/2)^{\sigma-2}}{\tilde{\eta}(2n)^\sigma}|t^2-t^1|\right]^{\frac{\log(1/\eta)}{\log(\xi^\sigma \eta^{\sigma-2})}}\right\}$$

$$\leqslant \frac{\beta}{\eta} \max\left\{1, \left[\frac{(\beta/2)^{\sigma-2}}{\tilde{\eta}(2n)^\sigma}\right]^{\frac{\log(1/\eta)}{\log(\xi^\sigma \eta^{\sigma-2})}}\right\}$$

$$\cdot\left\{\max\left[\max_{1 \leqslant i \leqslant n}|x_i^2-x_i^1|, |t^2-t^1|^{1/\sigma}\right\}^{\frac{\log(1/\eta)}{\log \xi}}\right.$$

$$\leqslant c_2 \frac{\left(|x^2-x^1|+|t^2-t^1|^{1/\sigma}\right)^{\frac{\log(1/\eta)}{\log \xi}}}{(8n^{3/2})^{j_0}\left[\frac{\log(1/\eta)}{\log \xi}+\frac{\sigma-2}{\sigma}\left(\frac{\log(1/\eta)}{\log \xi}\right)^2\right]}$$

$$\leqslant C_{15}\left[\frac{d(P_1, P_2)}{\bar{d}_{P,P}^{1+\gamma}}\right]^{\gamma},$$

其中 $\gamma = \frac{\log(1/\eta)}{\log \xi}$. 定理证毕.

要做到在 $\bar{Q}$ 中 Hölder 估计成立，尚需作近边 Hölder 条件估计. 其做法和前一章类似. 设 $u|_{\partial^* Q} = u^*$ 满足 β, β/σ 阶的 Hölder 条件，Hölder 常数由下式定出

$$c_\beta = c_{\beta,\beta/\sigma} = \sup_{(x^1,t^1),(x^2,t^2)\in\partial^* Q} \frac{|u^*(x^2, t^2) - u^*(x^1, t^1)|}{(|x^2 - x^1| + |t^2 - t^1|^{1/\sigma})^\beta},$$

$$(0 < \beta \leqslant 1).$$

引理 8 存在常数 β_1, C_{16} 仅依赖于 n, μ, ν, σ, M, β 与 $\operatorname{diam} \Omega$, 使 $\sigma\beta_1 < \beta$, 且当 $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$, $u^* \in C^{\beta,\beta/\sigma}(\partial^* Q)$ $(0 < \beta \leqslant 1)$, u 满足方程 $\mathscr{L} u = B(x, t, u, u_x)$ 与边值条件 $u|_{\partial^* Q} = u^*$, $|u| \leqslant M$ 于 $\bar{Q}$ 及 (1), (2) 成立. 则有

$$|u(x, t) - u(x, 0)| \leqslant C_{16}(1 + c_\beta)\frac{t^{\beta_1}}{d^\beta(x)},$$

其中 $d(x) = d(x, \partial\Omega)$.

证 记

$$U = \frac{1}{h}\{\exp\{h[u(x, t) - u^*(x, 0)]\} - 1\},$$

其中 $h = 2\mu/\nu$, $x^0 \in \Omega$.

类似于定理 7 中的证明得:

$$\tilde{\mathscr{L}} U \geqslant \mu_1 |P|^\sigma - \mu_2, \quad \tilde{\mathscr{L}} = \sum \tilde{A}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial t},$$

$$P = U_x,$$

$$\nu_0(1 + |P|^{\sigma-2})|\xi|^2 \leqslant \sum \tilde{A}_{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \mu_0(1 + |P|^{\sigma-2})|\xi|^2, \quad \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

其中 $\nu_0 = \nu e^{-2h(\sigma-2)M}$, $\mu_0 = \mu e^{2h(\sigma-2)M}$, $\mu_1 = \mu e^{-2h(\sigma-1)M}$, $\mu_2 = \mu e^{2hM}$. 记

$$\eta(x) = \left(1 - \frac{|x - x^0|^2}{F^2}\right)^m, \quad v = \eta U,$$

其中 $R < d(x^0)$，$m > 1$，常数m将于下面取定．我们有：

$$|\eta_{x_i}| \leqslant \frac{2m}{R}\eta^{1-1/m}, \quad \tilde{\mathscr{L}}\eta \geqslant -4m\mu_0(1 + |P|^{\sigma-2})\frac{\eta^{1-1/m}}{R^2},$$

应用不等式

$$\min(\alpha|p|^a - \beta|p|^b) = -(a-b)\left(\frac{\beta}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}\left(\frac{b}{\alpha}\right)^{\frac{b}{a-b}},$$

$$(a > b > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0)$$

及 $R \leqslant \operatorname{diam}\Omega$，我们有：

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{L}}v &\geqslant \eta\tilde{\mathscr{L}}U - 2\mu_0(1 + |P|^{\sigma-2})|\eta_x||P| + U\tilde{\mathscr{L}}\eta \\
&\geqslant \Big[\mu_1\eta|P|^{2+\frac{\sigma-2}{n+1}} - \mu_2\eta - 2\mu_0(1 + |P|^{\frac{\sigma-2}{n+1}}) \\
&\quad \cdot c_1\frac{\eta^{1-1/m}}{R}|P| - c_2(1 + |P|^{\frac{\sigma-2}{n+1}})\frac{\eta^{1-1/m}}{R^2}\Big]D^{\frac{1}{n+1}} \\
&\geqslant \left\{-\mu_2 - 2\mu_0\left[1 + \left(\frac{c_3\eta^{-1/m}}{R}\right)^{\frac{\sigma-2}{n+1}}\right]c_1\frac{\eta^{-1/m}}{R}\left(\frac{c_3\eta^{-1/m}}{R}\right)\right. \\
&\quad \left. - c_2\left[1 + \left(\frac{c_3\eta^{-1/m}}{R}\right)^{\frac{\sigma-2}{n+1}}\frac{\eta^{-1/m}}{R^2}\right]\right\}\eta D^{\frac{1}{n+1}} \\
&\geqslant -c_4R^{-2-\frac{\sigma-2}{n+1}}D^{\frac{1}{n+1}},
\end{aligned}$$

上式的成立是在取 $m \geqslant 2 + \dfrac{\sigma-2}{n+1}$ 之下，其中 $D = \det(\tilde{A}_{ij})$.

由此应用 Александров 型极值原理得：

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{|x-x^0|\leqslant R\\0\leqslant t\leqslant\tau}} v(x,t) &\leqslant \sup_{\substack{|x-x^0|\leqslant R\\t=0}} U + c_5\frac{R^{\frac{n}{n+1}}}{R^{2+\frac{\sigma-2}{n+1}}}\left(\int_{\substack{|x-x^0|\leqslant R\\0\leqslant t\leqslant\tau}} dx\,dt\right)^{\frac{1}{n+1}} \\
&\leqslant c_6c_\beta R^\beta + c_5\left(\frac{\tau}{R^\sigma}\right)^{\frac{1}{n+1}}.
\end{aligned}$$

因此

$$u(x^0,\tau) - u^*(x^0,0) \leqslant c_7(1 + c_\beta)\left[c_6R^\beta + c_5\left(\frac{\tau}{R^\sigma}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right].$$

U 用 $-U$ 代替，得到 $u^*(x^0, 0)-u(x^0, \tau)$ 的类似估计式. 取 $R^{\sigma+(n+1)\beta}=\tau$ 得:

$$
\begin{aligned}
|u(x^0, \tau)-u^*(x^0, 0)| &\leqslant c_8(1+c_\beta)\tau^{\frac{\beta}{\sigma+(n+1)\beta}} \\
&\leqslant c_9(1+c_\beta)d^{-\beta}(x_0)\tau^{\frac{\beta}{\sigma+(n+1)\beta}},
\end{aligned}
$$

上式当 $\tau \leqslant d^{\sigma+(n+1)\beta}(x^0)$ 时成立. 当 $\tau > d^{\sigma+(n+1)\beta}(x^0)$ 时它显然成立. 取 $C_{16}=\max(2, c_9)$ 及 $\beta_1=\dfrac{\beta}{\sigma+(n+1)\beta}$, 引理得证.

当 $\partial\Omega \in C^2$, 经过适当的 x 坐标双方非奇异变换，可设 $\partial\Omega$ 的一部分在 $x_n=0$ 上. 移动坐标原点，设 $\{x \mid |x|<R, x_n=0\}$ 在此部分内,且设 $\{x \mid |x|<R, x_n>0\} \subset \Omega$.

引理 9 存在常数 δ, δ_1, C_{17}, C_{18} 仅依赖于 n, μ, ν, σ, M, β 与 $\operatorname{diam}\Omega$ 使 $\delta<\delta_1$ 且当 $u \in C^{2,1}\{x \mid |x|<R, x_n>0, 0<t \leqslant T\} \cap C\{x \mid |x| \leqslant R, x_n \geqslant 0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $u^* \in C^{\beta, \beta/\sigma}\{x \mid |x| \leqslant R, x_n=0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $(0<\beta \leqslant 1)$, u 满足方程 $\mathscr{L}u=B$ 及 $u|_{\partial^* Q}=u^*$, $|u| \leqslant M$ 于 $\bar{Q}$, 及 (1), (2) 成立. 则有:

$$
|u(x, t)-u^*(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0, t)| \leqslant C_{17}(1+c_\beta)\left(\frac{x_n}{R}\right)^\delta \tag{34}
$$

当 $x_n>0$, $|x| \leqslant R/2$, $t^0+R^\sigma/2 \leqslant t \leqslant t^0+R^\sigma (t^0 \geqslant 0)$ 时成立. 又

$$
|u(x, t)-u^*(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0, 0)| \leqslant C_{18}(1+c_\beta)\left(\frac{x_n+t^{1/\sigma}}{R}\right)^\delta \tag{35}
$$

当 $x_n+t^{1/\sigma}>0$, $|x| \leqslant R/2$, $t \leqslant R^\sigma$ 成立.

证 记

$$
\eta(x, t)=\left(1-\frac{|x|^2}{R^2}\right)^m\left(\frac{t-t^0}{R^\sigma}\right)^m, \quad (m>1).
$$

设 $t^0+R^\sigma/2 \leqslant t^1 \leqslant t^0+R^\sigma$, 记 $u^*=u^*(0, \cdots, 0, t^1)$,

$$
s=\frac{x_n}{R}+\varepsilon\left[\frac{(t-t^1)^2}{R^{\sigma+2}}+\frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}{R^2}\right]+\varepsilon_1,
$$

$$v(x,t)=\eta(x,t)s^{-\alpha}(u-u^*)^m,$$

其中 ε 为小正常数，ε_1 为小正数，$0<\alpha<\min\left\{\frac{1}{2(n+1)},\frac{m\beta}{2\sigma}\right\}$.

又 $m(>2)$ 为偶数.

当 $|x|\leqslant R$, $t^0\leqslant t\leqslant t^0+R^\sigma$ 有:

$$v|_{x_n=0}\leqslant c_1\left(\frac{R^2}{\varepsilon}\right)^\alpha\left[\frac{u^*(x_1,\cdots,x_{n-1},0,t^1)-u^*}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i^4+|t-t^1|^{2/\sigma}\right)^{\sigma\alpha/m}}\right]^m$$

$$\leqslant c_2c_\beta^mR^{\beta m-2(\sigma-1)\alpha},$$

$$\mathscr{L}v=s^{-\alpha}(u-u^*)^m\mathscr{L}\eta+\eta s^{-\alpha}\mathscr{L}(u-u^*)^m+\eta(u-u^*)^m$$

$$\cdot\mathscr{L}s^{-\alpha}+2\sum A_{ij}\left[s^{-\alpha}\frac{\partial(u-u^*)^m}{\partial x_i}\eta_{x_j}\right.$$

$$\left.+\eta\frac{\partial s^{-\alpha}}{\partial x_i}\frac{\partial(u-u^*)^m}{\partial x_j}+(u-u^*)^m\frac{\partial s^{-\alpha}}{\partial x_i}\eta_{x_j}\right]$$

我们有下面的估计:

$$\mathscr{L}\eta\geqslant-c_3\eta^{1-1/m}\left[\frac{1}{R^2}(1+|p|^{\sigma-2})+\frac{1}{R^\sigma}\right],$$

$$\mathscr{L}(u-u^*)^m=m(m-1)(u-u^*)^{m-2}\sum A_{ij}u_{x_i}u_{x_j}$$

$$+m(u-u^*)^{m-1}\mathscr{L}u\geqslant m(u-u^*)^{m-2}$$

$$\cdot[(m-1)\nu(1+|p|^{\sigma-2})|p|^2-2M\mu(1+|p|^\sigma)]$$

$$\geqslant m(u-u^*)^{m-2}\left[\frac{(m-1)\nu}{2}|p|^\sigma-2M\mu\right]$$

$$\geqslant c_3(u-u^*)^{m-2}|p|^\sigma+c_4(u-u^*)^m|p|^\sigma-c_5,$$

上式当取 m 较大使 $m\geqslant1+\frac{2M\mu}{\nu}$ 及 $\frac{\nu}{4}m(m-1)\geqslant c_3$ 时

成立.

$$\mathscr{L}s^{-\alpha}\geqslant\alpha(\alpha+1)s^{-\alpha-2}\nu(1+|p|^{\sigma-2})\cdot\frac{1+4\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n-1}x_i^4}{R^2}$$

$$-\alpha s^{-\alpha-1}\mu(1+|p|^{\sigma-2})\frac{2n\varepsilon}{R^2}$$

$$\geqslant \alpha\frac{1+|p|^{\sigma-2}}{R^2}s^{-\alpha-2}(\nu-2n\mu\varepsilon c_6)$$

$$\geqslant \frac{\alpha\nu}{2}\;\frac{1+|p|^{\sigma-2}}{R^2}s^{-\alpha-2},$$

上式当 $\varepsilon\leqslant\frac{\nu}{4n\mu c_6}$ 时成立，

$$\left|2\sum A_{ij}\;\frac{\partial(u-u^*)^m}{\partial x_i}\eta_{x_j}\right|\leqslant 2\mu mn|u-u^*|^{m-1}(1+|p|^{\sigma-2})$$

$$\cdot\,|p|\frac{2m\eta^{1-1/m}}{R}\leqslant\frac{c_3}{2}(u-u^*)^{m-2}\eta(1+|p|^{\sigma})$$

$$+c_7(1+|p|^{\sigma-2})\frac{\eta^{1-2/m}}{R^2},$$

$$\left|\sum 2A_{ij}\;\frac{\partial s^{-\alpha}}{\partial x_i}\frac{\partial(u-u^*)^m}{\partial x_j}\right|$$

$$\leqslant c_8\frac{\alpha s^{-\alpha-1}}{R}(1+|p|^{\sigma-2})|p|\,|u-u^*|^{m-1}$$

$$\leqslant\frac{c_3}{2}(u-u^*)^{m-2}s^{-\alpha}(1+|p|^{\sigma})+\frac{c_9\alpha^2}{R^2}s^{-\alpha-2}(1+|p|^{\sigma-2}),$$

$$\left|\sum 2A_{ij}\;\frac{\partial s^{-\alpha}}{\partial x_i}\eta_{x_j}\right|\leqslant\frac{c_{10}\alpha}{R^2}s^{-\alpha-1}(1+|p|^{\sigma-2})\eta^{1-1/m}$$

$$\leqslant\frac{1+|p|^{\sigma-2}}{R^2}\left(\frac{\alpha\nu}{4}\eta s^{-\alpha-2}+c_{11}\alpha\eta^{1-2/m}\right).$$

设 m，ε 满足上述诸限制． 取 $\alpha=\nu/4c_9$，把这些估计代入 $\mathscr{L}v$ 的不等式得：

$$\mathscr{L}v\geqslant s^{-\alpha}(u-u^*)^m\left(c_4\eta|p|^{\sigma}-c_{12}\eta^{1-2/m}\frac{|p|^{\sigma-2}}{R^2}-\frac{c_{13}}{R^{\sigma}}\right)$$

$$\geqslant s^{-\alpha}(u-u^*)^m c_{14}\left(c_4\eta|p|^{2+\frac{\sigma-2}{n+1}}-c_{12}\frac{\eta^{1-2/m}}{R^2}|p|^{\frac{\sigma-2}{n+1}}\right.$$

$$\left.-\frac{c_{13}}{R^{\sigma}}\right)D^{\frac{1}{n+1}}\geqslant-\frac{c_{15}s^{-\alpha}}{R^{\sigma}}D^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\geqslant -\frac{c_{15}}{\varepsilon^{\alpha}R^{\sigma}}\left(\frac{R}{r}\right)^{2\alpha}D^{\frac{1}{n+1}},$$

上式当 $m \geqslant 2+\frac{\sigma-2}{n+1}$ 时成立，其中

$$r=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2},\quad D=\det(A_{ij}).$$

取 m 使上面不等式成立. 由此应用 Александров 型极值原理得：

$$\sup_{\substack{|x|\leqslant R,x_n\geqslant 0,\\ t^0\leqslant t\leqslant t^0+R^{\sigma}}} v(x,t)\leqslant c_2c_{\beta}^{m}R^{\beta m-2(\sigma-1)\alpha}$$

$$+c_{16}R^{\frac{n}{n+1}+2\alpha-\sigma}\left[\iint_{\substack{|x|\leqslant R,x_n>0,\\ t^0\leqslant t\leqslant t^0+R^{\sigma}}} r^{-2(n+1)\alpha}dxdt\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\leqslant c_{17}(1+c_{\beta}^{m})R^{\frac{n}{n+1}(2-\sigma)},$$

因此得到：

$$|u(0,\cdots,0,x_n,t^1)-u^*(0,\cdots,0,t^1)|$$
$$\leqslant\left[c_{18}(1+c_{\beta})\frac{(x_n+R\varepsilon_1)^{\alpha}}{R^{\frac{n}{n+1}(\sigma-2)+\alpha}}\right]^{1/m},$$

令 $\varepsilon_1\to 0$，记 $\alpha/m=\delta$，$\frac{1}{m}\left[\frac{n}{n+1}(\sigma-2)+\alpha\right]=\delta_1$，就得到当 $x_1=\cdots=x_{n-1}=0$ 时 (34) 式成立.

证明 (35) 当 $x_1=\cdots=x_{n-1}=0$ 成立时类似，仅需更改 $v(x,t)$ 的定义式为：

$$v(x,t)=\left(1-\frac{|x|^2}{R^2}\right)^m\left[\frac{x_n}{R}+\varepsilon\left(\frac{t^2}{R^{\sigma+2}}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^2}{R^2}\right)+\varepsilon_1\right]^{-\alpha}$$
$$\cdot[u(x,t)-u^*(0,\cdots,0)],$$

(34) 与 (35) 在一般情况下的成立仅需由上述结果做平移即可. 引理证毕.

关于 $\bar{Q}$ 中 u 满足 Hölder 条件有下面的定理.

定理 10 存在常数 $\alpha(0<\alpha<1)$ 与 C_{19}，仅依赖于 n，μ，ν，σ，M，β，$\partial\Omega$，diam Ω 及 $u^*\in C^{\beta,\beta/\sigma}(\partial^*Q)$ 的 Hölder 常数，

使当 $u\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$，$\mathscr{L}u=B$，$u|_{\partial^*Q}=u^*$，及满足 (1)、(2) 且 $2<\sigma<3$ 时，$\forall P_1(x^1, t^1)$，$P_2(x^2, t^2)\in\bar{Q}$ 有：

$$|u(x^2, t^2)-u(x^1, t^1)| \leqslant C_{19}(1+c_\beta)(|x^2-x^1|+|t^2-t^1|^{1/\sigma})^\alpha.$$

证 记 $d(x)=d(x, \partial\Omega)$，$\rho=|x^2-x^1|+|t^2-t^1|^{1/\sigma}$，不失一般性可设 $\rho\leqslant 1$.

情况 1. $\bar{d}_{P_1P_2}>\dfrac{1}{C_{14}}\rho^{1/\sigma}$.

应用定理 7 得

$$|u(x^2,t^2)-u(x^1,t^1)|\leqslant C_{20}\rho^{\left(1-\frac{1+\gamma}{\sigma}\right)\gamma}.$$

情况 2. $\bar{d}_{P_1P_2}\leqslant\dfrac{1}{C_{14}}\rho^{1/\sigma}$，$\bar{d}_{P_1P_2}=\min(t^1, t^2)^{1/\sigma}$.

设 $\min(t^1, t^2)=t^1$，则有：

$$t^2=t^1+(t^2-t^1)\leqslant\frac{1}{C_{14}^\sigma}\rho+\rho^\sigma\leqslant 2\rho.$$

当 $\min(d(x^1), d(x^2))>\rho^{\beta_1/2\beta}$ 时，应用引理 8 得：

$$\begin{aligned}|u(x^2, t^2)-u(x^1, t^1)| &\leqslant |u(x^2, t^2)-u(x^2, 0)|+|u(x^1, t^1)\\ &\quad -u(x^1, 0)|+|u(x^2, 0)-u(x^1, 0)|\\ &\leqslant C_{16}(1+c_\beta)\frac{(t^1)^{\beta_1}+(t^2)^{\beta_1}}{\min(d(x^1), d(x^2))^\beta}+c_\beta\rho^\beta\\ &\leqslant c_1(1+c_\beta)\rho^{\beta_1/2}.\end{aligned}$$

当 $\min(d(x^1), d(x^2))\leqslant\rho^{\beta_1/2\beta}$ 时，设 $\min(d(x^1), d(x^2))=d(x^1)$，则

$$d(x^2)\leqslant d(x^1)+|x^2-x^1|\leqslant\rho^{\beta_1/2\beta}+\rho\leqslant 2\rho^{\beta_1/2\beta},$$

因此有

$$\max\{d(x^1), d(x^2), (t^1)^{1/\sigma}, (t^2)^{1/\sigma}\}\leqslant c_2\rho^{\beta_1/2\beta}. \tag{36}$$

我们将于情况 4 中再考察它.

情况 3. $\bar{d}_{P_1P_2}\leqslant\dfrac{1}{C_{14}}\rho^{1/\sigma}$，$\bar{d}_{P_1P_2}=\min(d(x^1), d(x^2))$.

设 $\min(d(x^1), d(x^2)) = d(x^1) = |x^1 - y^1|$，$d(x^2) = |x^2 - y^2|$，其中 $y^1, y^2 \in \partial\Omega$，则有

$$d(x^2) = d(x^2, \partial\Omega) \leqslant |x^2 - y^1| \leqslant |x^2 - x^1| + |x^1 - y^1|$$

$$\leqslant \rho + \frac{1}{C_{14}}\rho^{1/\sigma} \leqslant \frac{2}{C_{14}}\rho^{1/\sigma},$$

$$|y^2 - y^1| \leqslant |y^2 - x^2| + |y^1 - x^1| + |x^2 - x^1| \leqslant \frac{4}{C_{14}}\rho^{1/\sigma}.$$

当 $\min(t^1, t^2) > \rho^{\delta/2\delta_1}$，令 $R = \rho^{\delta/2\sigma\delta_1}$ 有：

$$|u(x^2, t^2) - u(x^1, t^1)| \leqslant |u(x^2, t^2) - u(y^2, t^2)|$$

$$+ |u(x^1, t^1) - u(y^1, t^1)| + |u(y^2, t^2) - u(y^1, t^1)|$$

$$\leqslant C_{17}(1 + c_\beta)\frac{d(x^2)^\delta + d(x^1)^\delta}{R^{\delta_1}} + c_\beta(|y^2 - y^1|$$

$$+ |t^2 - t^1|^{1/\sigma})^\beta \leqslant c_3(1 + c_\beta)\rho^{\frac{1}{\sigma}\min(\delta/2, \beta)}.$$

当 $\min(t^1, t^2) \leqslant \rho^{\delta/2\delta_1}$，令 $\min(t^1, t^2) = t^1$，则有：

$$t^2 = t^1 + (t^2 - t^1) \leqslant \rho^{\delta/2\delta_1} + \rho^\sigma \leqslant 2\rho^{\delta/2\delta_1},$$

因此有：

$$\max\{d(x^1), d(x^2), (t^1)^{1/\sigma}, (t^2)^{1/\sigma}\} \leqslant C_4\rho^{\delta/2\sigma\delta_1}, \qquad (37)$$

将于下面情况中考察它.

情况 4. (36)，(37) 为满足下面不等式的特殊情况.

$$\max\{d(x^1), d(x^2), (t^1)^{1/\sigma}, (t^2)^{1/\sigma} \leqslant c_5\rho^{(1/2)\min(\beta_1/\beta, \delta/\sigma\delta_1)},$$

取 R 为常数，应用引理 9 的 (35) 得：

$$|u(x^2, t^2) - u(x^1, t^1)| \leqslant C_{18}(1 + c_\beta)$$

$$\cdot \left[\frac{\max(d(x^1), d(x^2)) + \max(t^1, t^2)^{1/\sigma}}{R}\right]^\delta$$

$$\leqslant c_6(1 + c_\beta)\rho^{(\delta/2)\min(\beta_1/\beta, \delta/\sigma\delta_1)}.$$

综合上面诸情况，定理得证.

由 Hölder 条件估计即得出，满足 (1)，(2) 的拟线性抛物方程第一边值问题的解为存在、唯一. 详情可参阅 [4].

§3 具第二种自然结构条件的完全非线性抛物方程解的一些先验估计与第一边值问题解的存在、唯一性

转到考察完全非线性抛物型方程. 设常数 μ, μ_1, μ_2, ν, σ 给定，满足 $\mu > \nu > 0$, $2 < \sigma < 3$, μ_1, $\mu_2 > 0$. 设Ω为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界区域，$T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T]$. 于 $Q \times \boldsymbol{R}^{1+n} \times \mathcal{S}^n$ 定出实函数 $F(x, t, u, u_i, u_{ij})$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. 设$F$关于 x, u, u_i, u_{ij} 为 C^2，关于 t 为 C^1. 设下面结构条件对 $(x, t) \in Q$, $u, \tilde{u} \in R$, $\xi, \tilde{x}, u_i, \tilde{u}_i \in \boldsymbol{R}^n$, $u_{ij}, \tilde{u}_{ij} \in \mathcal{S}^n$ 为成立：

$$uF_u(x, t, u, 0, 0) \leqslant \mu_1 u^2 + \mu_2, \tag{38}$$

$$\nu\left(1 + \sum_i |u_i|^{\sigma-2}\right)|\xi|^2 \leqslant \sum F_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$\leqslant \mu\left(1 + \sum_i |u_i|^{\sigma-2}\right)|\xi|^2, \tag{39}$$

$$|F(x, t, u, u_i, 0)| \leqslant M(u)\left(1 + \sum_i |u_i|^\sigma\right), \tag{40}$$

$$|F| + |F_u| + \sum_j |F_{u_j}|\left(1 + \sum_i |u_i|\right) + \sum_j |F_{x_j}|\left(1 + \sum_i |u_i|\right)^{-1}$$

$$\leqslant M_1(u)\left[1 + \sum_i |u_i|^\sigma + \sum_{i,j} |u_{ij}|\left(1 + \sum_i |u_i|^{\sigma-2}\right)\right], \tag{41}$$

$$F_{(\eta)(\eta)} \leqslant M_2(u, u_k)\left\{\left(1 + \sum_{i,j} |u_{ij}|^3\right)(|\tilde{x}|^2 + |\tilde{u}|^2)\right.$$

$$+ \left(1 + \sum_{i,j} |u_{ij}|\right)\sum_i |\tilde{u}_i|^2 + \left[\left(1 + \sum_{i,j} |u_{ij}|\right)\right.$$

$$\left.\left.\cdot (|\tilde{x}| + |\tilde{u}|) + \sum_i |\tilde{u}_i|\right]\sum_{i,j} |\tilde{u}_{ij}|\right\}, \tag{42}$$

$$|F_t| \leqslant M_3(u, u_k)\left(1 + \sum_{i,j} |u_{ij}|^2\right), \tag{43}$$

其中 $M(u)$, $M_1(u)$, $M_2(u, u_k) = M_2(u, u_1, \cdots, u_n)$ 为变量的有界函数，$\eta = (\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_i, \tilde{u}_{ij})$，又 $F_{(\eta)(\eta)}$ 表示F沿η的二次方向微商.

条件(38)—(43)称为二阶完全非线性抛物方程

$$u_t = F(x, t, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) \tag{44}$$

的第二种自然结构条件. 当 $\sigma = 2$ 时,它化为前一章中所述的自然结构条件(不妨称为第一种自然结构条件).

设 $\partial^* Q = \partial\Omega \times \{0 \leqslant t \leqslant T\} \cup \Omega \times \{t = 0\}$ 为Q的抛物边界. 设

$$u|_{\partial^* Q} = u^* \tag{45}$$

为给定的函数.

当 $|u|_{C(\partial^* Q)} < \infty$, $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ 满足(38), (39) (44), (45)时, u 于 $\bar{Q}$ 为有界的证明同前一章定理1. 因此下面讨论均设 $|u| \leqslant |u|_{C(\bar{Q})} \leqslant M_0$, $(x, t) \in \bar{Q}$, M_0 为仅与 μ, ν, μ_1 μ_2, σ, $|u^*|_{C(\partial^* Q)}$ 有关的常数. 且把(40)改为

$$|F(x, t, u, u_i, 0)| \leqslant \mu\left(1 + \sum_i |u_i|^\sigma\right),$$

否则取μ与 $\max\limits_{|u| < M_0} M(u)$的较大者代替$\mu$即可.

当$P = (x, t)$, $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{t})$时,记$d(P, \tilde{P}) = (|x - \tilde{x}|^2 + |t - \tilde{t}|)^{1/2}$, 用 $\|u\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})} = \sup\limits_{P, \tilde{P} \in \bar{Q}} \dfrac{|u(P) - u(\tilde{P})|}{d^\alpha(P, \tilde{P})}$ 做 $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})$ 的定义,且 Hölder 系数即为 $\|u\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})}$. 类似地定出 $\|u\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\partial^* Q)}$.

定理 11 设 $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ 为(44), (45)的解且

$$\|u\|_{C(\bar{Q})} \leqslant M_0, \ \|u\|_{C^{\beta,\beta/2}(\partial^* Q)} \leqslant M_\beta \quad (0 < \beta < 1).$$

设F满足(39), (40). 则存在常数α与 C, $0 < \alpha < \beta$, $C > 0$, 使

$$\|u\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})} \leqslant C(1 + M_\beta),$$

其中α与C仅依赖于 n, μ, ν, σ, M_0, T, $\partial\Omega$ 及 diam Ω.

证 当 (x^1, t^1), $(x^2, t^2) \in \partial^* Q$ 时有:

$$\frac{|u(x^2, t^2) - u(x^1, t^1)|}{(|x^2 - x^1|^2 + |t^2 - t^1|^{2/\sigma})^\beta} \leqslant \max\{1, T^{\beta(1-2/\sigma)}\}$$

$$\cdot \frac{|u(x^2, t^2) - u(x^1, t^1)|}{(|x^2 - x^1|^2 + |t^2 - t^1|)^\beta} \leqslant \max\{1, T^{\beta(1-2/\sigma)}\} M_\beta.$$

(44) 写为

$$\mathscr{L} u = \sum A_{ij} u_{x_i x_j} - u_t = -F(x, t, u, u_{x_i}, 0),$$

其中

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} (x, t, u, u_{x_i}, \theta u_{x_i x_j}) d\theta.$$

应用引理 10 得：

$$\sup_{(x^1,t^1),(x^2,t^2)\in \bar{Q}} \frac{|u(x^2, t^2) - u(x^1, t^1)|}{(|x^2 - x^1)^2 + (t^2 - t^1)^{2/\sigma})^{\alpha_1}} \leqslant C_1(1 + M_\beta).$$

再由

$$\frac{|u(x^2, t^2) - u(x^1, t^1)|}{(|x^2 - x^1|^2 + |t^2 - t^1|)^{2\alpha_1/\sigma}} \leqslant 2^{(1-2/\sigma)\alpha_1} \max\{1,$$

$$(\operatorname{diam} Q)^{2\alpha_1(1-2/\sigma)}\} \frac{|u(x^2, t^2) - u(x^1, t^1)|}{(|x^2 - x^1|^2 + |t^2 - t^1|^{2/\sigma})^{\alpha_1}}.$$

取 $\alpha = 2\alpha_1/\sigma$，定理得证.

定理 12 设 $u^* \in C^{2,1}(\partial Q \times [0, T]) \cup C^1(\bar{Q} \times \{t = 0\})$，$u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$ 为 (44)，(45) 的解，且 $\|u\|_{C(\bar{Q})} \leqslant M_0$. 设 F 满足 (39)，(41)，则有：

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{C(\partial Q \times [0,T])} \leqslant C\{1 + \|u^*\|_{C^{2,1}(\partial Q \times [0,T])} + \|u^*\|_{C^1(Q \times \{t=0\})}\},$$

其中 N 为 ∂Q 的内法线，C 仅依赖于 n，μ，ν，M_0，σ，T 与 ∂Q.

证 由 x 的双方非奇异坐标变换可把 ∂Q 的一部分化直成为

$$\Sigma_{R,T} = \{(x, t) \mid |x_i| < R(1 \leqslant i \leqslant n-1),$$
$$x_n = 0\} \times \{0 \leqslant t \leqslant T\},$$

相应的 Q 的部分为

$$Q_{R,T} = \{(x, t) \mid |x_i| < R(1 \leqslant i \leqslant n-1),$$

$$0 < x_n < R\} \times \{0 < t < T\} \subset Q,$$

像定理 11 中一样，把 $u_t = F$ 写为

$$\mathscr{L} u = \sum A_{ij} u_{x_i x_j} - u_t = -F(x, t, u, u_{x_i}, 0).$$

记

$$U = \frac{\nu}{2\mu} \left\{ \exp \left\{ \frac{2\mu}{\nu} [u(x_1, \cdots, x_n, t) - u^*(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0, t)] \right\} - 1 \right\},$$

$$P = U_x,$$

则有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{L}} U &= \sum \widetilde{A}_{ij}(x, t, U, P, D^2U) U_{x_i x_j} - U_t \\
&\equiv \sum A_{ij}(x, t, u, u_x^* + e^{-\frac{2\mu}{\nu}(u-u^*)} P, \cdots) U_{x_i x_j} - U_t \\
&= \frac{2\mu}{\nu} e^{\frac{2\mu}{\nu}(u-u^*)} \sum A_{ij}(u_{x_i} - u_{x_i}^*)(u_{x_j} - u_{x_j}^*) \\
&\quad + e^{-\frac{2\mu}{\nu}(u-u^*)} \mathscr{L} u - e^{\frac{2\mu}{\nu}(u-u^*)} (\sum \widetilde{A}_{ij} u_{x_i x_j}^* - u_t^*) \\
&\geqslant \mu e^{-\frac{2\mu}{\nu}(\sigma-1)(u-u^*)} [2 |P + u_x^* e^{\frac{2\mu}{\nu}(u-u^*)}| |P|^2 \\
&\quad - |P + u_x^* e^{\frac{2\mu}{\nu}(u-u^*)}|^\sigma - c_1 |P|^{\sigma-2} - c_2] \\
&\geqslant c_3 |P|^\sigma - c_4 |P|^{\sigma-2} - c_5 \geqslant -c_6.
\end{aligned}$$

记

$$v = \log \left(1 + \frac{x_n}{R} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 / R^2 \right), \quad w = K \frac{v}{R} - U,$$

其中 ε 为小正数，K 为正数．取 $K = K_\varepsilon$ 充分大，使

$$w \geqslant 0 \text{ 于 } \partial Q_{R,T} \cap \{0 \leqslant t \leqslant T\},$$

于 $\partial Q_{R,T} \cap \{t = 0\}$ 有

$$\frac{\partial w}{\partial x_n} \geqslant \frac{K}{1 + x_n/R + \varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 / R^2} - \exp \left\{ \frac{2\mu}{\nu} [u^*(x_1, \cdots, x_n, 0) - u^*(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0, 0)] \right\}$$

$$\cdot\left[\frac{\partial u^*}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_n,0)-\frac{\partial u^*}{\partial x_n}(x_1,\cdots,x_{n-1},0,0)\right]$$

$$\geqslant\frac{K}{2+(n-1)\varepsilon}-c_7\|u^*\|_{C^1(\Omega\times\{t=0\})}\geqslant 0,$$

因此

$$w|_{\partial Q_{R,T}\cap\{t=0\}}\geqslant 0.$$

如果 w 于 $Q_{R,T}$ 取到最小，则于取最小值的点有：$w_x=0$，$\tilde{\mathscr{L}}w\geqslant 0$. 但

$$\tilde{\mathscr{L}}w|_{w_x=0}\leqslant\left(1+\left|\frac{K}{R}v_x\right|^{\sigma-2}\frac{K}{R^3}\right)\left[-\nu\frac{1+4\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n-1}x_i^4/R^2}{\left(1+x_n/R+\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}x_i^4/R^2\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\mu n\varepsilon}{1+x_n/R+\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}x_i^4/R^2}\right]+c_7$$

$$\leqslant-\frac{K}{R^3}\frac{\nu-\mu n(n+1)\varepsilon}{\left(1+x_n/R+\varepsilon\sum_{i=1}^{n-1}x_i^4/R^2\right)^2}+c_7<0,$$

上式当 $\varepsilon<\dfrac{\nu}{2n(n+1)\mu}$ 及 $K=K_\varepsilon$ 充分大时成立. 因此这时 w 不能在 $Q_{R,T}$ 中取最小,即有 $w\geqslant 0$ 于 $\bar{Q}_{R,T}$.

$$0\leqslant\left.\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|_{x=0}=\frac{K}{R^2}-u_x\Big|_{\substack{x=0\\0\leqslant t\leqslant T}}.$$

u 用 $-u$ 代替得 $0\leqslant\dfrac{K}{R^2}+u_x\Big|_{\substack{x=0\\0\leqslant t\leqslant T}}$，因此 $|u_x|_{\substack{x=0\\0\leqslant t\leqslant T}}\leqslant\dfrac{K}{R^2}$. $|u_x|$ 于 $x_n=0$ 上 $|x_i|\leqslant R/2$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 的点估计类似.

用 $\partial\Omega$ 的有限覆盖,得到定理的证明.

定理 13 设 F 满足结构不等式 (39), (40), (41). 设

$$u\in C^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$$

为 (44), (45) 的解且 $u_x\in C^{2,1}(\bar{Q})$. 设 $\|u\|_{C(\bar{Q})}\leqslant M_0$, $\|u_x\|_{C(\partial^*Q)}\leqslant$

M_1，又 $\|u\|_{C^{\beta,\beta/2}(\bar{Q})} \leqslant M_\beta$．则有

$$\|u_x\|_{C(\bar{Q})} \leqslant C,$$

其中 C 仅依赖于 n, μ, ν, σ, M, M_1, M_β, $\operatorname{diam} Q$ 与 T．

证 记 $\max\limits_{x\in\bar{Q}} |u_x| = M_2$．当 $M_2 < \sqrt{2}$ 时，定理已为真，因此设 $M_2 \geqslant \sqrt{2}$．设 $M_2 = u_x(P_0)$，$P_0 = (x^0, t^0)$．柱体

$$\left\{(x, t) \,\middle|\, |x - x^0| < \frac{1}{M_2},\quad t^0 - \frac{1}{M_2^2} < t < t^0\right\}$$

记为 Q_0．于 $\overline{Q_0 \cap Q}$ 考察函数

$$v(x, t) = \eta^2(x, t)|u_x|^2 + \alpha M_2^2[u(x, t) - u(x^0, t^0)]^2,$$

其中 α 为常数将于下面定出．$\eta(x, t)$ 为截断函数，满足：

$$0 \leqslant \eta(x, t) \leqslant 1,\ \eta(x^0, t^0) = 1,\ \eta|_{\partial^* Q_0} = 0,\ |\eta_{x_i}| \leqslant c_1 M_2,$$
$$|\eta_{x_i x_j}| \leqslant c_2 M_2^2,\ |\eta_t| \leqslant c_3 M_2^2.$$

设 v 于 $P_1(x^1, t^1)$ 点取到最大，则有：

$$\begin{aligned} M_2^2 = v(P_0) \leqslant v(P_1) &= \eta^2(P_1)|u_x(P_1)|^2 + \alpha M_2^2[u(P_1) - u(P_0)]^2 \\ &\leqslant \eta^2(P_1)|u_x(P_1)|^2 + \alpha M_2^{2-2\beta} M_\beta^2 \end{aligned} \tag{46}$$

情况 1．$\alpha M_\beta^2 M_2^{-2\beta} \geqslant \dfrac{1}{2}$．

这情况下有：

$$M_2 \leqslant (2\alpha M_\beta^2)^{1/2\beta}.$$

情况 2．$\alpha M_\beta^2 M_2^{-2\beta} < \dfrac{1}{2}$，$P_1 \in \partial^*(Q_0 \cap Q)$．

由 (46) 得：

$$M_2 \leqslant (2M_1^2)^{1/2}.$$

情况 3．$\alpha M_\beta^2 M_2^{-2\beta} < \dfrac{1}{2}$，$P_1 \in Q_0 \cap Q$．

由 (46) 得：

$$\eta(P_1) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{M_2}{\sqrt{2}} \leqslant |u_x(P_1)| \leqslant M_2. \tag{47}$$

记

$$\dot{\mathscr{L}} v = \sum F_{u_{ij}} v_{x_i x_j} + \sum F_{u_i} v_{x_i} - v_t$$

由于 v 于 P_1 取最大有：

$$0 \geqslant \mathscr{L} v|_{P_1} = |u_x^2| \mathscr{L}(\eta^2) + \eta^2 \mathscr{L}(|u_x|^2) + 2\sum F_{u_{ij}}(\eta^2)_{x_i} \cdot (|u_x|^2)_{x_j} + 2\alpha M_2^2[u(P_1) - u(P_0)]\mathscr{L} u + 2\alpha M_2^2 \sum F_{u_{ij}} u_{x_i} u_{x_j},$$

$$|\mathscr{L}\eta^2| = |\sum F_{u_{ij}}(\eta^2)_{x_i x_j} + \sum F_{u_i}(\eta^2)_{x_i} - (\eta^2)_t| \leqslant (1 + |p|^{\sigma-2}) c_4 M_2^2 + \frac{1 + |p|^\sigma + |r|(1 + |p|^{\sigma-2})}{1 + |p|} \cdot c_5 M_2 + c_6 M_2^4,$$

$$(|p| = |u_x|, \quad |r| = |u_{xx}|),$$

$$\mathscr{L}(|u_x|^2) = 2\sum u_{x_k} \mathscr{L} u_{x_k} + 2\sum F_{u_{ij}} u_{x_k x_i} u_{x_k x_j},$$

$$|\mathscr{L} u_{x_k}| = \left|\sum F_{u_{ij}}(u_{x_i x_j})_{x_k} + \sum F_{u_i}(u_{x_i})_{x_k} - \frac{dF}{dx_k}\right| = |F_u u_{x_k} + F_{x_k}| \leqslant c_7(1 + |p|)[1 + |p|^\sigma + |r|(1 + |p|^{\sigma-2})],$$

$$|\mathscr{L} u| = |\sum F_{u_{ij}} u_{x_i x_j} + \sum F_{u_i} u_{x_i} - F| \leqslant c_8[1 + |p|^\sigma + |r|(1 + |p|^{\sigma-2})],$$

结合上述四个不等式及 (47) 得：

$$\begin{aligned} & 2\alpha\nu(1 + |p|^{\sigma-2})|p|^4 + \nu(1 + |p|^{\sigma-2})|r|^2 \\ & \leqslant 2\alpha\nu M_2^2(1 + |p|^{\sigma-2})|p|^2 + 2\nu\eta^2(1 + |p|^{\sigma-2})|r|^2 \\ & \leqslant 2\alpha M_2^2 \sum F_{u_{ij}} u_{x_i} u_{x_j} + 2\eta^2 \sum F_{u_{ij}} u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \\ & \leqslant |u_x|^2 |\mathscr{L}\eta^2| + 2\eta^2 |\sum u_{x_k} \mathscr{L} u_{x_k}| + 2|\sum F_{u_{ij}}(\eta^2)_{x_i} \cdot (|u_x|^2)_{x_j}| + 2\alpha M_2^2 |u(P_1) - u(P_0)||\mathscr{L} u| \\ & \leqslant c_9(|p|^{\sigma+2} + |r||p|^\sigma) + c_{10}\alpha(|p|^{\sigma+2-\beta} + |r||p|^{\sigma-\beta}) \end{aligned}$$

因此有：

$$\alpha|p|^{\sigma+2} + |r|^2|p|^{\sigma-2} \leqslant |r|^2|p|^{\sigma-2} + c_{11}|p|^{\sigma+2} + c_{12}\alpha^2|p|^{\sigma+2-2\beta} + c_{10}\alpha|p|^{\sigma+2-\beta} \leqslant |r|^2|p|^{\sigma-2} + c_{11}|p|^{\sigma+2} + c_{13}(\alpha^2 + 1)|p|^{\sigma+2-\beta}.$$

取 $\alpha = 2c_{11}$ 得：

$$M_2 \leqslant \sqrt{2}\,|p| \leqslant \sqrt{2}\left[\frac{c_{13}(1+4c_{11}^2)}{c_{11}}\right]^{1/\beta}.$$

结合情况 1，2，3 得：

$$M_2 \leqslant \max\left\{(4c_{11}M_\beta^2)^{1/\beta},\ (2M_1^2)^{1/2},\ \sqrt{2}\left[\frac{c_{13}(1+4c_{11}^2)}{c_{11}}\right]^{1/\beta}\right\}.$$

定理证毕.

上面已证明了 $\|u_x\|_{C(\bar{Q})}$ 有界，因而第二类结构不等式在此情况下与第一类结构不等式化为一样. 由此 $\|u_x\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q})}$，$\|u\|_{C^{2,1}(\bar{Q})}$，$\|u\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q})}$ 的估计均可应用前一章的结果得出.

第一边值问题解的存在、唯一性证明与前章§7类似，但略有差别如下：前章 § 7 的 (11) 式用

$$u_t = (1-\kappa)(1+|u_x|^2)^{\sigma/2-1}\Delta u + \kappa F(x,t,u,u_{x_i},u_{x_ix_j}),$$
$$(x,t)\in Q$$

代替. 前章 § 7 的 (13) 式用下式代替，

$$\begin{aligned}(v-u^0)_t = &(1-\kappa)[(1+|u_x^0|^2)^{\sigma/2-1}\Delta(v-u^0)\\ &+(\sigma-2)(1+|u_x^0|^2)^{\sigma/2-2}u_{x_i}^0(v_{x_i}-u_{x_i}^0)]\\ &+\kappa[\sum a_{ij}(v-u^0)_{x_ix_j}+\sum b_i(v-u^0)_{x_i}+c(v-u^0)]\\ &+(1-\kappa)E+\kappa H+(\kappa_1-\kappa)G,\end{aligned}$$

其中

$$(a_{ij},b_i,c,f)=(F_{r_{ij}},F_{p_i},F_z,F)(x,t,u^0,u_{x_i}^0,u_{x_ix_j}^0),$$

$$\begin{aligned}E = &(1+|w_x|^2)^{\sigma/2-1}\Delta w-(1+|u_x^0|^2)^{\sigma/2-1}\Delta u^0\\ &-(1+|u_x^0|^2)^{\sigma/2-1}\Delta(w-u^0)-(\sigma-2)\\ &\cdot(1+|u_x^0|^2)^{\sigma/2-2}u_{x_i}^0(w-u^0)_{x_i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G = &F(x,t,w,w_{x_i},w_{x_ix_j})-f-\sum a_{ij}(w-u^0)_{x_ix_j}\\ &-\sum b_i(w-u^0)_{x_i}-c(w-u^0),\end{aligned}$$

$$H=(1+|u_x^0|^2)^{\sigma/2-1}\Delta u^0-f,$$

G，H 的估计与过去一样. 又 E 是 $F(x,t,w,w_{x_i},w_{x_ix_j})=(1+|w_x|^2)^{\sigma/2-1}\Delta w$ 时的函数 G，因而 E 的估计与 G 一样. 故导出 $\|v-u^0\|_{C^{2+\alpha}}$ 的估计与过去一样. 又

$$\|v^2 - v^1\|_{C^{2+\alpha}} \leqslant K_1\|(1-\kappa)[E(W^2) - E(W^1)] + \kappa[G(x, t, W^2) - G(x, t, W^1)]\|_{C^\alpha},$$

因此它的估计也与过去一样.这样就证得第一边值问题解为存在、唯一.

后　　记

本书仅写出了部分拟线性方程与完全非线性方程的部分材料．许多重要方面未涉及．例如完全非线性方程的斜微商边值问题，完全非线性方程的应用等等均未谈到，这些缺陷只能俟将来进行补足．

符 号 索 引

Ω　　一般表示有界(联络)开区域

$\bar{\Omega}$　　Ω的闭包

$\partial\Omega$　　Ω的边界

$\subset\subset$　　$A\subset\subset B$表示$\bar{A}\subset B$

Ω'　　$\Omega'\subset\subset\Omega$

$d(x, A)$　　点x与集合A的距离，即 $d(x, A)=\inf\limits_{y\in A}\overline{xy}$

Ω_ρ　　$\Omega_\rho\subset\Omega$ 且 $d(\Omega_\rho, \partial\Omega)=\rho$

d_x　　$d_x=d(x, \partial\Omega)$

d_{xy}　　$d_{xy}=\min(d_x, d_y)$

Q　　一般表示柱体区域 $\Omega\times(0, T]$

∂^*Q　　Q的抛物边界，即 $\partial^*Q=\Omega\times\{t=0\}\cup\partial\Omega\times[0, T]$

Q'　　$Q'\subset Q$ 且 $d(Q', \partial^*Q)>0$

Q_ρ　　$Q_\rho\subset Q$ 且 $d(Q_\rho, \partial^*Q)=\rho$

d_P　　点 $P=(x, t)$ 与柱体Q的 ∂^*Q 的距离

$d_{P_1P_2}$　　$d_{P_1P_2}=\min(d_{P_1}, d_{P_2})$

$K(\rho)$, B_ρ　　均表示半径为ρ的球体

$B_\rho(x^0)$　　半径为ρ，中心为x^0的球体 $\{x \mid |x-x^0|<\rho\}$

$k_R(x^0)$　　$x^0=(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 为中心，边长为$2R$的正方体 $\{x \mid |x_i-x_i^0|<R, (1\leqslant i\leqslant n)\}$

$K_R(x^0, t^0)$　　$k_R(x^0)\times(t^0-R^2, t^0)$

$K_{R,T}$　　$k_R(0)\times(0, T)$

$\forall$　　对于所有

$\exists$　　存在

$\ni$　　使

$\Rightarrow$　导出

$|A|$　集合 A 的测度，即 $|A| = \text{mes}\, A$

a. e.　几乎处处

$\varnothing$　空集

$\partial u/\partial N$　N 表示边界曲面的法线方向，$\partial u/\partial N$ 表示在曲面上 u 的法向微商，一般 N 的方向向着曲面内部

$\boldsymbol{R}$　所有实数构成的一维欧氏空间

$\boldsymbol{R}^+$　所有正实数

$\boldsymbol{R}^n$　n 个实数组成的 n 维欧氏空间

ω_n　n 维欧氏空间中单位球面积，即 $n-1$ 维单位球面积

κ_n　n 维欧氏空间单位球体积

$\|u\|_p$　$\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u|^p dx\right]^{1/p}$，当 Ω 已给定时

$C^{k+\alpha}$　u 是 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的函数，对 $x_1, \cdots x_n$ 为 k 次连续可微，且 k 次微商满足 $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ 次的 Hölder 条件

$C^{2,1}$　u 是 $(x_1, \cdots, x_n, t)$ 的函数，对 $x_1, \cdots, x_n$ 二次连续可微，对 t 一次连续可微

$C^{2+\lambda,1+\lambda/2}$　$u_{x_ix_j}(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 与 u_t 对 x 满足 λ 次，对 t 满足 $\lambda/2$ 次的 Hölder 条件 $(0<\lambda\leqslant 1)$

$|u|_{\alpha,\Omega}$　$u(x)\in C^\alpha(\Omega)$ $(0<\alpha\leqslant 1)$，u 的 α 阶 Hölder 系数记为 $|u|_{\alpha,\Omega}$

$|u|_{\alpha,Q}$　$u(x, t)\in C^{\alpha,\alpha/2}(Q)$，$Q=\Omega\times(0, T]$，Hölder 系数

$$\sup\frac{|u(x, t)-u(x^1, t^1)|}{(|x-x^1|^2+|t-t^1|)^{\alpha/2}}$$ 记为 $|u|_{\alpha,Q}$

$W_p^k(\Omega)$　于区域 Ω 中 k 次弱微商均属于 $L^p(\Omega)$ 的函数空间

$\mathring{W}_p^k(\Omega)$　$W_p^k(\Omega)$ 中在 $\partial\Omega$ 附近为零的函数，按 $W_p^k(\Omega)$ 的范数取闭包的函数空间．也是 $C_0^\infty(\Omega)$ 按 $W_p^k(\Omega)$ 的范数取闭包的函数空间．

$W_p^{k,k/2}(Q)$ 于柱体区域 $Q=\Omega\times(0, T]$ 中对 x 弱微商 k 次，对

t 弱微商 $k/2$ 次(设 k 为正偶数)均属于 $L^p(\Omega)$ 的函数空间

a^+　　$a^+ = \max(a, 0)$

a^-　　$a^- = \min(a, 0)$

sup (inf)　　上界(下界)

ess sup(ess inf)　　$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f(x)$ 为除掉 Ω 内测度为零集合而外的上界 ($\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} f(x)$ 为相应的下界)

参 考 文 献

[1] 张恭庆，临界点理论及其应用，上海科学技术出版社（1986）.

[2] A. Friedman, Partial differential equations, Holt, Reihart and Winston, 1969.

[3] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Spring-Verlag, 1983.

[4] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные Уравнения параболического типа, М. Наука, 1967.

[5] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М, Наука, 1965.

[6] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Spring-Verlag, 1983.

[7] G. C. Dong and S. Li, A boundary value problem for nonlinear telegraph equation, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 5, 6(1981), 705—711.

[8] H. Brezis and L. Nirenberg, Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems, Annali, Scuola Normale Superiore, Pisa IV, vol. V, no 2(1978), 225—326.

[9] E. M. Landesman and A. C. Lazor, Nonlinear pertubation of linear elliptic boundary value problem at resonance, Journal of Math. and Mech., 19, 7 (1970), 609—623.

[10] Ding Weiyue, Periodic solutions of dissipative wave equations, Preprint.

[11] G. C. Dong and S. Li, On the initial value problem for a nonlinear Schrödinger equations, Jour. of Diff. Equa., 42, 3(1981), 353—365.

[12] W. A. Strauss, Dispersion of low-energy waves for two conservative equations, Arch. Rat. Mech. Anal., 55(1974), 86—92.

[13] S. Klainerman, Loss of decay for a nonlinear Schrödinger equation, Preprint.

[14] S. Klainerman, Long time behavior of solutions to nonlinear evolution equation, Arch. Rat. Mech. Anal., 78, 1(1982), 73—96.

[15] Y. Tsutsumi, Global solution of the nonlinear Schrödinger equation in exterior domains, Comm. in PDE, 8(12), (1983), 1337—1374.

[16] 陈韵梅，非线性发展方程解的整体存在性，博士学位论文.

[17] L. Bers, Existence and uniqueness of subsonic flwos past a given profile, Comm. Pure Appl. Math., 7(1954), 441—504.

[18] R. Finn and D. Gilbarg, Three-dimensional subsonic flows, and asymtotic estimates for elliptic partial differential equations, Acta Math., 98(1957), 265—296.

[19] 董光昌，空间亚声速流及此边值问题在更高维情况的推广，浙江大学学报，1979,(1),33—63.

[20] 藕彪，关于“空间亚音速流及此边值问题在更高维情况的推广”，预印本.

[21] 藕彪，有“源”的空间亚音速绕流问题解的存在性、唯一性和连续依赖性，预印本.

[22] C. Miranda, Partial differential equations of elliptic type, Spring-Verlag, 1970. 1970.

[23] J. Bear, Dynamics of fluids in porous media, Amer. Elsevier, New York, 1977.

[24] B. H. Gilding, A nonlinear degenerate parabolic equation, Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa, Vol 4, No 3(1977), 392—432.

[25] Y. Z. Chen, Uniqueness of the generalized solution of quasilinear degenerate parabolic equation, Proceedings of the 1982 Changchun Symposium on differential geometry and differential equations, 317—332.

[26] G. C. Dong, A higher dimensional nonlinear degenerate parabolic equation, Proceedings of the Changchun Symposium on differential geometry and differential equations, 373—382.

[27] Y. Z. Chen, Hölder estimates for solutions of uniformly degenerate quasilinear parabolic equations, Chinese Annals of Math., Vol 5, Ser B, No 4(1984), 661—678.

[28] G. C. Dong, The first boundary value problems for solutions of degenerate quasilinear parabolic equations, Preprint.

[29] Y. Z. Chen; On finite diffusing speed for uniformly degenerate quasilinear parabolic equation, Preprint.

[30] 边保军，关于二阶退化抛物型方程解的有限传播速度问题，预印本.

[31] А. Д. Александров, Исследования о принципе максимума, Изв. высг. Учеб. завед., сер. матем., №. 1(1961), 3—20.

[32] C. Pucci, Limitazioni per soluzioni di equazioni ellipliche, Ann. Mat. Pure Appl., (4) 74(1966), 15—30.

[33] Н. В. Крылов, Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического Уравнения, Сиб. матем. журнал, 17, № 2(1976), 290—303.

[34] 陈亚浙，抛物型方程的 Alexahdrov 极值原理与 Bony 极值原理，预印本.

[35] А. Д. Александров, Внутренная геометрия выпуклых поверхностей, Гостехздат, 1945. 有中译本.

[36] S. Y. Cheng and S. T. Yau, On the regularity of the Monge-Ampere equation det $(\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j)=F(x,u)$, Comm. Pure Appl. Math., Vol 15(1977), 41—68.

[37] J. M. Bony, Principle du maximum dans les espaces de Sobolev, C. R. Acad. Sc. Paris, t-265, Serie A(1967), 333—336.

[38] P. L. Lions, A remark on Bony maximum principle, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 88, No 3(1983), 503—508.

[39] Н. В. Крылов, М. В. Сафонов, Некоторое свойство решений параболический Уравнений с измеримыми коеффитментами, Изв. АН СССР, Сер. матем., Т. 44, № 1 (1980), 161—175.

[40] N. S. Trudinger, Local estimates for subsolutions and supersolutions of general second order elliptic quasilinear equations, Invent. Math., 61(1980), 67—79.

[41] G. C. Dong, Local estimates for subsolutions and supersolutions of general second order parabolic quasilinear equations, Preprint.

[42] Н. В. Крылов, Об оценках производных решений нелинейних параболический Уравнений, Дан СССР, Сер. матем., 1984, Т. 274, №.1, 23—26.

[43] 陈亚浙，Крылов 关于完全非线性方程的一些先验估计方法，数学进展.

[44] Н. В. Крылов, Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические Уравнение, Изв. АН СССР, Сер. матем., 1982, №3, 487—523.

[45] Н. В. Крылов, Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические Уравнение в области, Изв. АН СССР, Сер. матем., 1983, Т. 47, № 1, 75—108.

[46] G. C. Dong, A priori Hölder estimates for solutions of quasilinear parabolic equations with natural structure conditions, Preprint.

[47] G. C. Dong, On the estimation of derivatives for solutions of fully nonlinear parabolic equation, Preprint.

[48] K. Tso, On the Aleksandrov-Bakel'man type maximum principle for second-order parabolic equations, Comm. PDE, vol. 10, No. 5(1985), 543—553.

[49] 董光昌，线性二阶偏微分方程，浙江大学出版社，1987.

[General Information]
书名=非线性二阶偏微分方程
作者=董光昌编著
页数=308
SS号=10069703
出版日期=